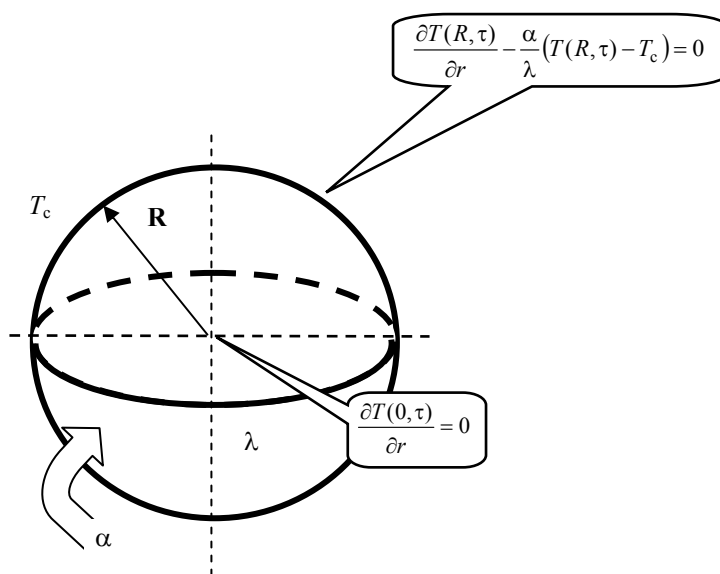


**В.И. КОНОВАЛОВ, А.Н. ПАХОМОВ,  
Н.Ц. ГАТАПОВА, А.Н. КОЛИУХ**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

**ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ  
В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ**



• Издательство ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

**В.И. КОНОВАЛОВ, А.Н. ПАХОМОВ,  
Н.Ц. ГАТАПОВА, А.Н. КОЛИУХ**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

**ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ  
В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ**

*Утверждено Ученым советом ТГТУ  
в качестве учебного пособия*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2005

УДК 536.248  
ББК ҫ331я73-1  
М54

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Компьютерное и математическое моделирование»  
ТГУ им. Г.Р. Державина  
*А.А. Арзамасцев*

доктор технических наук, профессор,

**Коновалов В.И., Пахомов А.Н., Гатапова Н.Ц., Колиух А.Н.**

M54 Методы решения задач тепломассопереноса. Теплопроводность и диффузия в неподвижной среде: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 80 с.

В учебном пособии изложен материал, посвященный решению задач теплопроводности и диффузии в неподвижной среде, изучаемых в курсах «Основные процессы и аппараты химической технологии», «Явления переноса в ПАХТ», «Инженерная оптимизация в ПАХТ», «Энерго- и ресурсосбережение в ПАХТ», «Инженерная экология в ПАХТ», «Химические процессы и реакторы». Приведены примеры решений, материалы для самостоятельной работы, основная и дополнительная литература.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов химико-технологических и машиностроительных специальностей, а также для работников химической и смежных отраслей промышленности, интересующихся вопросами расчета и моделирования тепловых и массообменных процессов.

УДК 536.248  
ББК 6331я73-1

**ISBN 5-8265-0442-0**

© В.И. Коновалов, А.Н. Пахомов,  
Н.Ц. Гатапова, А.Н. Колиух, 2005

© Тамбовский государственный  
технический университет, (ТГТУ), 2005

Учебное издание

КОНОВАЛОВ Виктор Иванович,  
ПАХОМОВ Андрей Николаевич,  
ГАТАПОВА Наталья Цибиковна,  
КОЛИУХ Александр Николаевич

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ  
В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Федченко

Компьютерное макетирование И.В. Евсеевой

Подписано к печати 12.12.2005.

Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объем: 4,65 усл. печ. л.; 4,7 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз. С. 874

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

**1** Задачи тепло- и массопереноса являются одними из важнейших задач математической физики в курсе «Процессы и аппараты химической технологии». Это объясняется как их повсеместным распространением, так и определяющим влиянием на эффективность тепловых, диффузионных и химических аппаратов.

В учебном пособии изложен материал, посвященный решению задач теплопроводности и диффузии в неподвижной среде, изучаемых в курсах, читаемых на кафедре «Химическая инженерия (Процессы и аппараты химической технологии)» в ТГТУ: «Основные процессы и аппараты химической технологии (ПАХТ)», «Явления переноса в ПАХТ», «Инженерная оптимизация в ПАХТ», «Энерго- и ресурсосбережение в ПАХТ», «Инженерная экология в ПАХТ», «Химические процессы и реакторы» и других. Приведены примеры решений, материалы для самостоятельной работы, основная и дополнительная литература.

Рассматривается теплоперенос и диффузия в твердом теле или в любой неподвижной среде, контактирующей с жидкостью или газом. Условия тепло- и массоотдачи на поверхности раздела фаз учитываются в граничных условиях. К таким процессам относятся:

- тепловые процессы нагрева и охлаждения обрабатываемых материалов,
- процессы диффузии, связанные с набуханием, увлажнением, экстрагированием (выщелачиванием) и пр.,
- комплексные тепло-диффузионные процессы сушки, адсорбции, кристаллизации и др.,
- процессы комбинированной термической и тепло-диффузионной обработки, связанные с химическими, физико-химическими и структурно-реологическими превращениями, такие как обработка полимеров, вулканизация резинотехнических изделий, вытяжка и фиксация волокнистых материалов и пр.,
- наконец, все химические процессы, в том числе каталитические, контролируемые диффузией или нестационарной температурой.

Далее к ним примыкают процессы тепломассопереноса в движущейся среде с соответствующими задачами, дополнительно учитывающими перемещение жидкости или газа.

**2** Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов химико-технологических и машиностроительных специальностей, а также для работников химической и смежных отраслей промышленности, интересующихся вопросами расчета и моделирования тепловых и массообменных процессов. В связи с этим некоторые разделы и основная литература предназначены для первичного изучения материала, а более сложные разделы и обширная дополнительная литература – для углубленного изучения.

В списке дополнительной литературы приводятся как последние издания, так и некоторые базовые классические работы, независимо от года издания.

**3** Для описания вышеперечисленных процессов используются многочисленные простые и сложные, индивидуальные и универсальные, общие и частные постановки задач и математические модели.

Реальность мира и реальных процессов необъятна, она бесконечно глубока и широка. При любом, самом детальном, возможном в данных условиях рассмотрении, всегда сохраняются неизвестные черты явления.

Для описания реальности составляются ее модели. Они всегда являются приближенными. Так и модели процессов тепломассопереноса, теплопроводности и диффузии являются приближенными не только в детально рассматриваемой простой форме уравнений Фурье и Фика, но и даже в имеющихся или разрабатываемых самых общих, полных и сложных формах.

Постановки описаний, научных и инженерных задач всегда являются модельными.

Последние десятилетия характеризуются созданием общих, универсальных описаний и моделей. При всей их познавательной ценности, универсальные модели часто оказываются неработоспособными. Причины неработоспособности универсальных моделей и нарушений теоретических представлений и аналогий между процессами во многом схожи.

Прежде всего это подмена множества реальных конкретных явлений их общими модельными схемами, которые не могут учитывать индивидуальные особенности всех включаемых в эти схемы явлений. Особенно это характерно для явлений и процессов на границах раздела фаз, для гетерогенных и многофазных сред, для материалов и потоков со сложной структурой, для высокоинтенсивных процессов. Некоторые из таких явлений вообще могут быть не ясны, не изучены, или даже в настоящее время не известны.

Другая возможная причина – неаддитивность явлений: переменное и разнонаправленное влияние суммируемых явлений в течение процесса или в разных конкретных условиях.

И наконец сравнимые и переменные погрешности процессных экспериментов и измерений свойств, особенно, когда в модели требуется «чрезмерно много» различных характеристик такого рода; некорректности в решениях обратных задач; погрешности компьютерных расчетов, в том числе, казалось бы, вызванных примитивными причинами: «набегание ошибок»; когда требуются многократные итерации и рекуррентные соотношения; при «наложениях статистик»; когда имеются знакопеременные и плохо сходящиеся ряды, границы и разрывы; когда приходится учитывать большое число членов рядов, ошибки округления, число значащих цифр и разности близких числовых величин; а иногда также неустойчивые решения, «жесткие» уравнения и даже случаи патологии в численных методах.

Для мира природы «усложнение» процессов всегда естественно. «Сложностей» для природы, собственно говоря, не существует: любой комплексный натурный процесс вбирает в себя все свои составляющие без каких-либо «трудностей» в своем реальном «масштабе времени», независимо от их «количества», «вероятности» или «стохастичности», уровня рассмотрения или «иерархического положения». Соответственно любой реальный процесс, взятый во всех деталях, бесконечно глубок.

В то же время любая, сколь угодно сложная одно- или многоуровневая математическая модель ограничена и конечна. Еще Аристотелем было подчеркнуто: «Образованный человек не требует большей точности знаний от предмета, чем это допускает сам предмет». По Козьме Пруткову все звучит проще: «Нельзя объять необъятное». Гипотетическая «полная» модель, естественно, совпадала бы с натурным явлением. Внешнее сходство модели и реальности при их отрыве в науке друг от друга может носить черты самообмана, миражей в природе, защитной мимикрии у растений и животных или даже напоминать искусственных человекоподобных существ в «Солярисе» С. Лема.

При этом массовое распространение мощных и дорогих современных научно-коммерческих программных продуктов может приводить (при отрыве от собственного серьезного эксперимента) к эйфории всемогущества формального математического моделирования, особенно опасной в силу одного из «принципов Питера», на который нельзя закрывать глаза, и который сформулирован самими основоположниками численных методов и компьютерного программирования: «ЭВМ многократно увеличивает некомпетентность вычислителя».

Дополнительно усугубляет ситуацию, как справедливо отмечают В.В. Дильман и А.Д. Полянин, то, что публикуемые численные компьютерные результаты такого рода во многом остаются лишь на совести авторов, так как рецензентам или пользователям проверить их практически невозможно. В то же время профессиональное и взаимодополняющее физическое и математическое моделирование («сопряженное моделирование» – по названию С.Г. Дьяконова) – это единственный путь содержательного изучения явлений и процессов. А какое-либо противопоставление экспериментальных и математических, аналитических и численных методов моделирования является, в лучшем случае, некорректным. Действительно, для профессионалов в области ПАХТ очевидно, что при усложнении исследуемых задач до уровня, недоступного прямому физическому эксперименту, должны использоваться косвенные данные и математические методы. Если задачи оказываются недоступными точным или приближенным аналитическим методам, то естественным основным аппаратом исследования таких задач становятся численные методы. При этом моделирование как физическое, так и математическое, является само по себе основным инструментом познания как такового.

4 В ряде последних работ было показано и подтверждено примерами, что главные трудности описания и моделирования сложных реальных процессов тепло- и массопереноса состоят не столько в математических, сколько в физико-химических проблемах анализа механизма и кинетики этих процессов. При этом основной проблемой для построения методов расчета взаимосвязанных процессов диффузии и теплопроводности остается учет взаимовлияния тепло-, влаго- и баропереноса. В настоящее время наибольшее распространение как в России, так и за рубежом для теоретического описания таких процессов имеет рассматриваемая далее система дифференциальных уравнений А.В. Лыкова, учитывающая «перекрестные эффекты» на базе линейной термодинамики необратимых процессов. Предложены также еще более общие описания, а в последние годы другие фундаментальные подходы, в том числе, в интенсивно развивающейся нелинейной термодинамике необратимых процессов. Эти прогнозируемые физической теорией взаимосвязи и особенности нужно иметь в виду, однако непосредственное применение сложных систем взаимосвязанных дифференциальных уравнений с многочисленными необходи-

мыми коэффициентами для конкретных рассматриваемых процессов по вышеуказанным причинам является затруднительным. Поэтому такие задачи целесообразно ставить в «развязанном» виде, что также рассматривается в данном пособии.

5 Тогда появляется возможность исследовать и описывать процессы тепло- и массопереноса комплектом обычных уравнений теплопроводности и диффузии, а взаимосвязи между процессами учитывать дополнительно.

Такие уравнения для массовых случаев тел канонических форм (пластина, цилиндр, шар) решаются аналитически. Решения приводятся в пособии как подробные для обучения на простых случаях, так и результирующие – для показа возможностей, для справки и для дальнейшей самостоятельной работы.

Численные методы в данном пособии не рассматриваются.

В конце пособия приведены задания для самостоятельной работы: сначала для простых задач теплопроводности и диффузии и для получения аналитических решений соответствующих уравнений в частных производных; далее для отдельных или взаимосвязанных безградиентных задач, упрощаемых до обыкновенных дифференциальных уравнений; и наконец для некоторых комплексных задач тепломассопереноса.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

### *Структура раздела:*

- 1.1 Дифференциальное уравнение теплопроводности (диффузии)
- 1.2 Постановки краевых задач теплопроводности (диффузии)
- 1.3 Общие постановки задач переноса
- 1.4 Приближенные постановки задач
- 1.5 Взаимосвязанный тепломассоперенос

### 1.1 Дифференциальное уравнение теплопроводности (диффузии)

**1.1.1** Процесс **теплообмена** представляет собой перенос энергии (обмен), происходящий **между** телами (средами), имеющими различную температуру. Существуют три способа распространения тепла: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение. На практике обычно теплообмен происходит несколькими, а иногда всеми этими способами. Тогда за основу берут общий «эффективный» теплообмен, учитывающий все способы.

Процессы **массообмена** представляют собой переход одного или нескольких веществ из одной фазы в другую **через** поверхность раздела. Перенос вещества как межфазный, так и внутри фазы, может происходить либо путем молекулярной диффузии, либо путем конвекции и молекулярной диффузии одновременно.

Распространение тепла или (и) вещества **внутри** одной фазы называют **теплопереносом**, **массопереносом** или **тепломассопереносом**. Также называют и всю совокупность процессов внутри- и межфазного переноса.

В данном пособии рассматриваются задачи переноса тепла теплопроводностью и задачи молекулярной диффузии в неподвижной среде, в частности, в твердом теле. Твердое тело может быть непористым ненабухающим, непористым коллоидным набухающим, капиллярно-пористым и смешанным – коллоидным капиллярно-пористым. К этой же системе относят так называемые засыпки или плотные слои зернистых материалов. Примеры таких материалов (соответственно их классификации): металлы, лиофобные полимеры; глины, лиофильные полимеры; пористые стекла, песок; растительные и животные ткани, сорбирующие слои.

Задачи теплопроводности и диффузии имеют широкое практическое применение. Умение решать подобные задачи позволяет получать важнейшие сведения о процессе. Например, для теплового процесса можно не только рассчитать стационарное температурное поле, тепловые потоки и средние значения температур отдельных элементов конструкции и аппарата в целом, но и определить характер изменения (профили, перепады, градиенты) температур в отдельных точках конструктивных элементов аппарата, предсказать возможные термодиффузионные эффекты, найти оптимальные параметры и предложить схему управления данным аппаратом или установкой.

Процессы теплопроводности и диффузии описываются формально сходными (аналогичными) уравнениями. Поэтому можно в основном рассматривать и решать задачи теплопроводности, так как они несколько шире по формальным характеристикам. В частности, в задачи теплопроводности входят и

коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , и коэффициент температуропроводности  $a = \lambda/c\rho$ , а в задачи диффузии – только коэффициент диффузии  $D$ , являющийся формальным аналогом  $a$ .

Однако всегда необходимо помнить, что эта аналогия является только формально-математической, так как физика процессов переноса тепла и вещества совершенно различна.

В дальнейшем при рассмотрении задач переноса будем вести речь в основном о тепловых процессах. Необходимые уточнения для процессов диффузии будут специально отмечаться в тексте дополнительно.

### 1.1.2 Основные понятия тепломассопереноса

*Теплопроводность* – процесс переноса теплоты посредством обмена энергией при хаотическом тепловом движении микрочастиц (в частности, молекул вещества) в среде, обусловленный неоднородным распределением температуры в этой среде (то есть молекулярная теплопроводность).

*Температурное поле* – это совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени. Если температура является функцией одних только пространственных координат  $T(x, y, z)$ , то температурное поле называется установившимся или *стационарным*. Если же, в общем случае, температура изменяется также во времени, то поле называется неуставившимся или *нестационарным*.

Основной задачей теплопроводности является определение и изучение пространственно-временного изменения температурного поля среды (тела).

Точки температурного поля, имеющие одинаковую температуру, образуют некую поверхность, называемую *изотермической* (рис. 1.1). Соответственно в двумерном случае линию равных температур называют *изотермой*.

Перепад температур в направлении нормали к изотермической поверхности определяет величину *градиента температуры*. Точнее, градиентом температуры является отношение приращения температуры  $\Delta T$  к расстоянию между изотермами по нормали. За положительное направление вектора градиента принимается направление в сторону возрастания температуры

$$\text{grad } T = \mathbf{1}_n (dT/dn), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{1}_n$  – единичный вектор, направленный по нормали в сторону возрастания температуры.

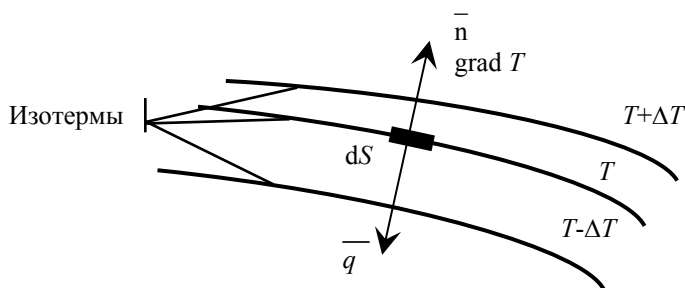


Рис. 1.1 Характеристики температурного поля

Аналогично определяются градиенты концентрации или градиенты других потенциалов переноса энергии или вещества.

Перенос теплоты теплопроводностью может происходить только при условии, что в различных точках тела температурное поле неоднородно, то есть существует определенный ненулевой градиент температуры. Значение плотности теплового потока (или *удельного теплового потока*)  $q$  в произвольной точке тела определяется как количество теплоты  $dQ$ , проходящее в единицу времени  $d\tau$  через единицу площади изотермической поверхности  $dS$

$$q = dQ/(dS d\tau). \quad (1.2)$$

Согласно предположению Фурье, тепловой поток через элемент изотермической поверхности пропорционален значению температурного градиента в заданной точке

$$q = -\lambda \text{ grad } T, \quad (1.3)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Выражение (1.3) является основой для вывода дифференциального уравнения температурного поля – закона теплопроводности Фурье.

Теплопроводность  $\lambda$  характеризует интенсивность переноса тепла в теле. В случае однородного изотропного тела значение коэффициента теплопроводности  $\lambda$  определяется количеством теплоты, проходящим в единицу времени при перепаде температуры в один градус на единице длины нормали. Таким образом, коэффициент теплопроводности имеет размерность Вт/(м·К). Значение коэффициента теплопроводности зависит от температуры, а в анизотропных телах – от направления теплового потока, а также от плотности, влажности и других характеристик материала (среды).

**1.1.3** Аналитическая теория теплопроводности основана на дифференциальном уравнении теплопроводности Фурье, физический смысл которого заключается в том, что уравнение связывает пространственное распределение температуры с изменением ее по времени. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности осуществляется из баланса тепла для единицы объема тела с учетом всех его составляющих и градиентного закона переноса тепла Фурье.

В прямоугольной системе координат дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v, \quad (1.4)$$

где  $x, y, z$  – пространственные координаты,  $q_v$  – мощность внутренних объемных источников (стоков тепла) в теле, например, при фазовых или химических превращениях, при объемном тепловыделении (в частности, при СВЧ нагреве), Вт, при их отсутствии  $q_v = 0$ ;  $c$  – теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>.

В уравнении (1.4) величины  $c, \lambda, \rho, q_v$  в общем случае являются функциями координат  $x, y, z$  и температуры  $T$ , то есть уравнение (1.4) нелинейно.

Если предположить постоянство  $c, \lambda, \rho, q_v$ , то уравнение (1.4) упростится и примет вид дифференциального уравнения в частных производных второго порядка **параболического** типа

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (1.5)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.6)$$

где  $\nabla^2 T$  – оператор Лапласа;  $a = \lambda/(c\rho)$  – температуропроводность, м<sup>2</sup>/с.

Уравнение (1.6) можно записать также в сферических, цилиндрических или других системах координат.

Существуют другие способы вывода, приводящие к более сложным выражениям уравнения теплопроводности: с включением второй и даже третьей производных; с учетом фактически конечной скорости распространения тепла в веществе, приводящего к гиперболическому дифференциальному уравнению и т.д. Целесообразность их применения возникает при особо интенсивных тепловых потоках, в так называемых нелинейных процессах и системах и пр.

**1.1.4** На практике для решения задач теплопроводности по возможности выбираются модельные тела наиболее распространенных и простых геометрических форм – так называемые **канонические формы**:

- одномерная бесконечная пластина, то есть пластина, геометрически ограниченная только по одной координате – толщине и соответственно изменение температуры которой происходит только по одной координатной оси, обычно  $x$ ;
- одномерный бесконечный цилиндр;
- одномерный шар;
- двух- и многослойные одномерные пластины, цилиндр, шар;
- двухмерные одно-, двух- и многослойные пластины, цилиндр, шар;
- трехмерные пластины, цилиндр, шар.



В соответствии с принятой геометрией модельного тела и условиями теплопереноса уравнение (1.6) может упрощаться. Например, для однослойной бесконечной пластины при отсутствии внутренних источников тепла оно имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

**1.1.5 Молекулярная (свободная) диффузия** описывается уравнением Фика

$$i = -D \operatorname{grad} C, \quad (1.8)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $C$  – концентрация диффундирующего вещества в теле,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $i$  – плотность потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

Видно, что градиентные уравнения Фика (1.8) и уравнения Фурье (1.1) по форме аналогичны. Соответственно дифференциальное уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = D \nabla^2 C + m_v. \quad (1.9)$$

Дифференциальное уравнение диффузии (1.9) аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности (1.6).

## 1.2 Постановки краевых задач теплопроводности (диффузии)

**1.2.1** Дифференциальное уравнение теплопроводности в общем случае имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы получить единственное решение, характеризующее конкретный процесс, необходимо дать замкнутое описание конкретного процесса. Для этого дифференциальное уравнение в общем виде дополняется: уравнениями состояния, уравнениями неразрывности, условиями в начальный момент времени, условиями на границах тела, данными о геометрии, в частности, условиями симметрии, о теплофизических свойствах материала, а иногда и другими замыкающими задачу сведениями.

Совокупность начального и граничных условий называют *краевыми условиями*. *Начальные условия* (НУ) состоят в задании температурного поля тела в момент времени, принятый за начальный. *Граничными условиями* (ГУ) задают характер теплового взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела.

Простейшим видом начальных условий являются равномерные, или так называемые безградиентные НУ

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = \text{const}. \quad (1.10)$$

Могут быть также произвольные и функционально заданные НУ, заданные произвольной или конкретной функцией

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (1.11)$$

или заданные представительным набором значений температуры в различных точках тела (в виде числовых значений температурного поля)

$$T(x, y, z, 0) = T_i(x_i, y_i, z_i). \quad (1.12)$$

Граничные условия также могут быть заданы несколькими способами. Простейшими и наиболее распространенными на практике являются граничные условия 1, 2, 3 и 4 рода.

*Граничные условия 1 рода (ГУ-1)*

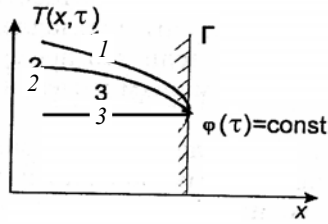
При этом задается распределение температуры на поверхности тела в виде функции координат и/или времени (рис .1.2)

$$T(x, y, z, \tau)|_{x, y, z = S} = f(x, y, z, \tau). \quad (1.13)$$

Например, для одномерной однослойной бесконечной пластины толщиной  $l$

$$T(0, \tau) = f_1(0, \tau); \quad (1.14)$$

$$T(l, \tau) = f_2(l, \tau). \quad (1.15)$$



**Рис. 1.2** Граничные условия 1 рода:

$1, 2, 3$  – температурные поля в разные последовательные моменты времени (для охлаждения тела),  $\Gamma$  – граница тела

К задачам с ГУ-1 относятся задачи охлаждения (нагрева) тела при искусственно заданном распределении температур на поверхности, при очень интенсивном теплообмене на поверхности, когда температуру поверхности можно считать равной температуре среды и в ряде других случаев.

Для диффузии ГУ-1 задаются аналогично

$$C(x, y, z, \tau)|_{x, y, z = S} = f(x, y, z, \tau). \quad (1.16)$$

*Граничные условия 2 рода (ГУ-2)*

В этом случае задается распределение плотности теплового потока на поверхности тела как функция координат и/или времени

$$q_{\text{пов}} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = f(x, y, z, \tau)|_S. \quad (1.17)$$

ГУ-2 часто реализуются, например, при поверхностном электронагреве, при нагревании тела высокотемпературными источниками тепла, когда теплообмен определяется излучением и т.д.

Для диффузии ГУ-2 задаются аналогично

$$-D \left( \frac{\partial C}{\partial n} \right)_S = f(x, y, z, \tau)|_S. \quad (1.18)$$

*Граничные условия 3 рода (ГУ-3)*

Здесь на поверхности тела задаются условия теплоотдачи с использованием температуры окружающей среды и коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К), характеризующего интенсивность теплового взаимодействия окружающей среды и поверхности тела. Соответственно поверхность тела воспринимает тепловой поток, записываемый по уравнению Ньютона. Тогда ГУ-3 рода имеют вид

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \alpha (T(x, y, z, \tau)|_S - T_c), \quad (1.19)$$

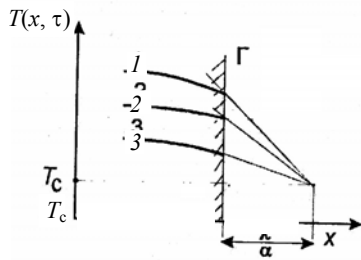
где  $T_c$  – температура в ядре потока окружающей среды.

ГУ-3 (рис. 1.3) наиболее часто реализуются на практике, когда имеет место конвективный теплообмен; часто используются как универсальные, так как ими можно приближенно имитировать и другие ГУ.

Для диффузии на поверхности тела задают аналогичные условия массоотдачи с использованием концентрации диффундирующего вещества в окружающей среде  $C_c$  и коэффициента массоотдачи  $\beta$ , м/с

$$-D\left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)_S = \beta(C(x, y, z, \tau)|_S - C_c). \quad (1.20)$$

Здесь  $T_c$  и  $C_c$  могут быть постоянными или меняться во времени.



**Рис. 1.3** Граничные условия 3 рода:

1, 2, 3 – температурные поля в разные последовательные моменты времени (для случая охлаждения тела);  $\Gamma$  – граница тела;  $T_c$  – температура среды;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности среды

#### Граничные условия 4 рода (ГУ-4)

ГУ-4 чаще всего соответствуют теплообмену поверхности рассматриваемого тела с поверхностью другого тела. Поэтому иногда ГУ-4 также называют стыковыми условиями или условиями сопряжения. В этом случае теплообмен на поверхности определяется законом Фурье, причем при идеальном контакте двух тел (тела и среды) температуры поверхностей считаются постоянными (иногда дополнительно вводят термическое сопротивление поверхности раздела).

ГУ-4 имеют вид

$$T_1(x, y, z, \tau)|_{x, y, z = S_1} = T_2(x, y, z, \tau)|_{x, y, z = S_2}, \quad (1.21)$$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{S_1} = \lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_{S_2}. \quad (1.22)$$

Здесь индекс 1 относится к поверхности первого тела  $S_1$ , а индекс 2 – к поверхности второго. Уравнение (1.21) характеризует условие непрерывности температурного поля, а уравнение (1.22) – закон сохранения энергии на поверхности соприкасающихся тел при условии идеального теплового контакта.

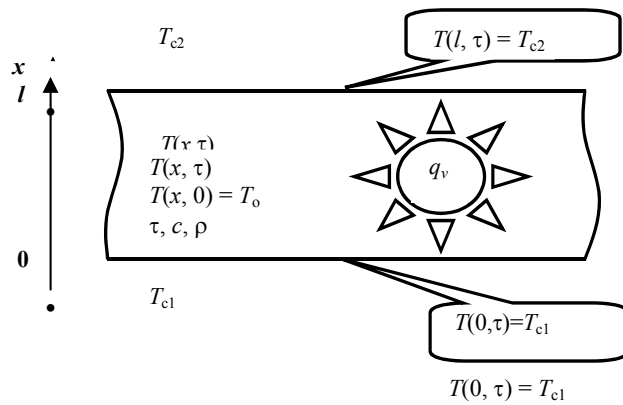
Встречаются также другие более сложные граничные условия, например:

- колебательные, при периодических изменениях температуры или концентрации, в том числе с движущимися или вращающимися телами или источниками, суточные или сезонные колебания и пр.;
- задачи с подвижной границей, например, в процессе плавления, затвердевания и пр.; это так называемые задачи Стефана или задачи Веригина;
- комбинированные граничные условия, разные для различных частей тела, или меняющиеся во времени и т.д.

**1.2.2** Приведем примеры некоторых типовых постановок задач теплопроводности. Будем считать все задачи линейными.

#### Пример № 1

Поставить задачу теплопроводности однослойной одномерной бесконечной пластины толщиной  $l$ . В начальный момент времени в пластине отсутствует температурный градиент и температура в центре пластины равна  $T_0$ . На одной поверхности пластины поддерживается температура  $T_{c1}$ , на другой  $T_{c2}$ . Внутри пластины действует источник тепла мощностью  $q_v$  (рис. 1.4).



**Рис. 1.4 К примеру № 1. Одномерная однослойная бесконечная пластина**

Примем, что пластина ориентирована по оси  $x$ , таким образом вторые частные производные по координатам  $y$  и  $z$  обращаются в ноль. Соответственно дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.23)$$

Дополним (1.23) начальными и граничными условиями. Как следует из условия задачи, это безградиентные НУ

$$T(x, 0) = T_0. \quad (1.24)$$

По условию задачи температура поверхностей задана в виде функций. Это граничные условия 1 рода:

$$T(0, \tau) = T_{c1}, \quad (1.25)$$

$$T(l, \tau) = T_{c2}. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.23) – (1.26) полностью определяют краевую задачу определения температуры одномерной неограниченной пластины в заданных условиях.

**Пример № 2**

Поставить краевую задачу определения температурного поля одномерного однослойного шара радиусом  $R$ . В начальный момент времени температурное поле подчиняется уравнению  $f(r)$ . Шар помещен в среду с температурой  $T_c$ , при этом теплообмен на поверхности подчиняется закону Ньютона и коэффициент теплоотдачи равен  $\alpha$ . Коэффициент теплопроводности шара  $\lambda$  (рис. 1.5).

Для решения данной задачи необходимо перейти от прямоугольной системы координат к сферической. Для этого используем следующие соотношения между прямоугольными и сферическими координатами:

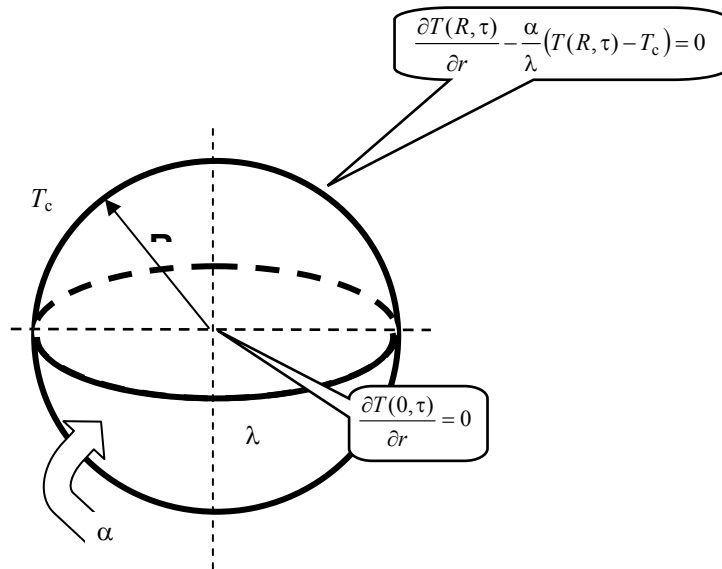
$$x = r \sin(\psi) \cos(\varphi), \quad (1.27)$$

$$y = r \sin(\psi) \sin(\varphi), \quad (1.28)$$

$$z = r \cos(\psi). \quad (1.29)$$

Используя (1.27) – (1.29), запишем уравнение (1.5) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.30)$$



**Рис. 1.5 К примеру № 2. Однослойный шар**

Так как в задаче рассматривается одномерный шар, это означает симметричное температурное поле по всем направлениям. С учетом того, что в теле нет внутренних источников тепла, дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right). \quad (1.31)$$

Начальные условия

$$T(r, 0) = f(r). \quad (1.32)$$

На поверхности шара по условию задачи задан теплообмен, подчиняющийся закону Ньютона, тогда граничные условия на поверхности шара запишем как ГУ-3

$$\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} - h(T(R, \tau) - T_c) = 0, \quad (1.33)$$

где  $h = \frac{\alpha}{\lambda}$ .

Шар имеет центральную точечную симметрию. При равномерном теплообмене по поверхности температурное поле будет симметричным, то есть имеем дополнительные условия симметрии (УС)

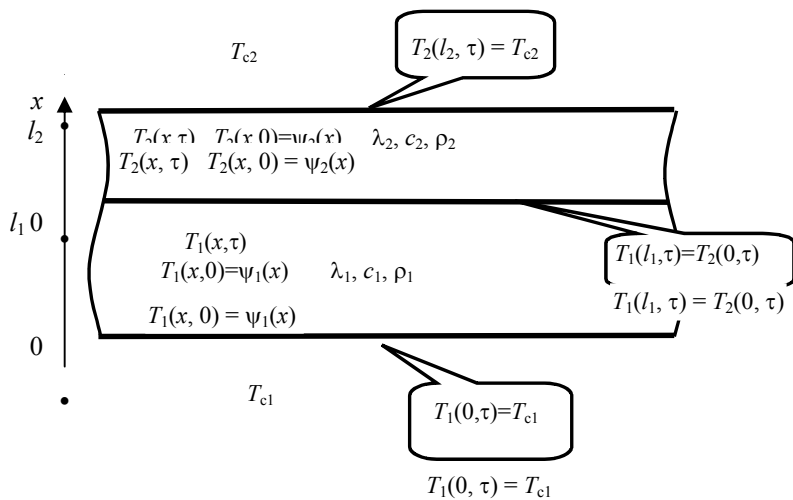
$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0. \quad (1.34)$$

Аналогичные УС записываются для равномерного теплообмена кругового цилиндра, или симметричного теплообмена с обеих сторон для пластины. В этом случае УС имеет также физический смысл **теплоизолированной** поверхности для половины пластины.

Уравнения (1.31) – (1.34) полностью определяют задачу теплопроводности одномерного шара в заданных условиях.

### **Пример № 3**

Поставить задачу теплопроводности для одномерного неограниченного тела, полученного путем соединения двух неограниченных одномерных пластин. Первая пластина имеет толщину  $l_1$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda_1$ , плотность  $\rho_1$ , теплоемкость  $c_1$ . Вторая пластина имеет толщину  $l_2$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda_2$ , плотность  $\rho_2$ , теплоемкость  $c_2$ . Температурное поле первой пластины в момент соприкосновения подчиняется уравнению  $\psi_1(x)$ , температурное поле второй –  $\psi_2(x)$ . С момента соприкосновения на внешних поверхностях пластин, контактирующих с окружающей средой, начинает поддерживаться температура: для первой пластины  $T_{c1}$ , для второй пластины  $T_{c2}$  (рис. 1.6).



**Рис. 1.6 К примеру № 3. Двухслойная одномерная бесконечная пластина**

Весьма часто на практике необходимо рассматривать тело, физически состоящее из нескольких частей различных размеров, геометрии и теплофизических свойств, например: гранулированные удобрения с внешним покрытием; химический продукт, обрабатываемый в слое на противне; биметаллические пластины; электрические провода с изоляцией, медицинские препараты в оболочке и т.д. В некоторых случаях физически однородное тело необходимо рассматривать как состоящее из нескольких частей (слоев). Такое разделение необходимо при наличии значительных температурных градиентов в телах, теплофизические свойства которых сильно зависят от температуры, в термолабильных и склонных к деструкции продуктах, например: различные красители, зерно, хлеб, другие пищевые продукты и пр.

Для постановки задачи теплопроводности в случае многослойных тел дифференциальные уравнения теплопроводности записываются отдельно для каждой части (слоя) тела. При этом используются индексы, отвечающие определенному слою.

Соответственно можно записать:

$$\frac{\partial T_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.35)$$

Здесь индекс 1 относится к нижней пластине, 2 – к верхней.

Начальные условия запишутся в виде:

$$T_1(x, 0) = \psi_1(x), \quad (1.36)$$

$$T_2(x, 0) = \psi_2(x). \quad (1.37)$$

При этом необходимо отметить очевидный факт, что координата  $x$  для первой пластины принадлежит интервалу  $[0, l_1]$ , а та же координата  $x$  для второй пластины принадлежит интервалу  $[0, l_2]$ . Соответственно такому значению координат по каждому слою будем записывать граничные и стыковые условия.

Граничные условия для наружной поверхности каждой пластины запишутся отдельно в виде:

$$T_1(0, \tau) = T_{c1}, \quad (1.38)$$

$$T_2(l_2, \tau) = T_{c2}. \quad (1.39)$$

Граничные условия на поверхности соприкосновения пластин (стыковые условия) запишем как ГУ-4 при идеальном тепловом контакте:

$$T_1(l_1, \tau) = T_2(0, \tau), \quad (1.40)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(l_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x} . \quad (1.41)$$

Особое внимание в уравнениях (1.38) – (1.41) необходимо обратить на значения координат  $x$ , используемых в уравнениях (1.38), (1.39) и в левых и правых частях уравнений (1.40), (1.41).

Уравнения (1.35) – (1.41) определяют постановку задачи в случае двухслойной пластины.

### 1.3 Общие постановки задач переноса

**1.3.1** В процессах и аппаратах для анализа и описания невзаимосвязанных явлений чаще всего используются исходные физические представления и соответствующие им постановки и общие математические модели следующих видов:

1) **градиентной природы** (например, явления вязкого трения при течении жидкостей и модели, включающие градиенты вектора скорости  $\text{grad}w$  или его компонентов  $\text{grad}w_i$ ; вышерассмотренные градиенты молекулярной теплопроводности  $\text{grad}T$ ; молекулярной диффузии  $\text{grad}C$  или химического потенциала  $\text{grad}\mu$ ; в теоретических работах рассматриваются градиенты как скалярных величин, так и векторов, и тензоров);

2) **экспоненциально-степенной природы** (например, в химической кинетике степенные зависимости скорости химических реакций от концентрации с Аррениусовской экспоненциальной зависимостью от температуры);

3) **интегрально-релаксационные представления**, учитывающие зависимость характеристик переноса от скорости сдвига, непосредственно от времени, влияние предыстории, конечность скорости переноса (например, реологически сложные среды и явления и их многочисленные релаксационные и механические модели, начиная с первичных и комбинированных механических моделей Р. Гука и И. Ньютона, Дж.К. Максвелла и У. Кельвина; релаксационно-временные реологические зависимости типа Ф.В.Г. Кольрауша; схемы учета конечности скорости теплопереноса типа А.В. Лыкова – П. Верно и др.).

**1.3.2** На этой основе строятся линейные или нелинейные, дифференциальные или дифференциально-интегральные уравнения полей соответствующих характеристик процессов или (и) обычно более простые по форме разновидности уравнений кинетики процессов.

В процессах и аппаратах это, прежде всего, уравнения полей рассчитываемых физических характеристик сплошной среды: температур, концентраций, скоростей, давлений, напряжений и других.

При этом, если переносные свойства сред (например, коэффициенты теплопроводности  $\lambda$ , диффузии  $D$ , вязкости  $\mu$ ) являются **переменными**, то в дифференциальных уравнениях соответствующих полей «потенциалов переноса»  $P(x, y, z, \tau)$  градиентам  $\nabla T$ ,  $\nabla C$ ,  $\nabla w$  будут соответствовать «**дивергентные**» члены  $\text{div}(\lambda \text{grad} T)$ ,  $\text{div}(D \text{grad} C)$ ,  $\text{div}(\mu \text{grad} w)$ .

При **постоянных** переносных коэффициентах они выносятся за знак производных, и в уравнениях полей вместо дивергентных будут члены с **операторами** Лапласа  $\nabla^2 T$ ,  $\nabla^2 C$ ,  $\nabla^2 w$ .

В правую часть уравнений могут входить также источниковые и дополнительные члены.

Общее балансное приращение количества тепла или массы в неподвижных средах выражается частной производной по времени, в движущихся – субстанциональной производной.

В результате модели полей такого рода математически оказываются во многом аналогичными, несмотря на их совершенно различную физическую («природную») сущность.

Единый подход к рассмотрению именно этой группы процессов методами математического анализа стал основой современной математической теории переноса.

В некоторых книгах по теории переноса, например, Дж. Ч. Слеттери, применяется также аппарат нелинейной термомеханики и тензорного анализа.

В ПАХТ есть также попытки применения статистического описания, например, книга И.О. Протодьяконова и С.Р. Богданова (школы П.Г. Романкова).

**1.3.3** Излучение и химические превращения, а также механические процессы в эту общую схему подхода не вписываются и в большинстве курсов «Явления переноса» не рассматриваются. В английском оригинале фундаментальной книги Берда, Стьюарта, Лайтфута имеется глава 14 по переносу излучением, которая в русском переводе была неоправданно исключена (из-за ограничения издательского объема книги).

Рассматриваемые поля физических характеристик сплошной среды связаны с фундаментальными физическими полями как с особой формой существования материи, определяющими, в конечном счете вместе со свойствами микрочастиц, все взаимодействия и свойства материи, не являющейся в действительности сплошной средой: электромагнитными полями (включающими в том числе излучение); гравитационными полями (определяющими в том числе «свободную» конвекцию); волновыми полями частиц в квантовой физике и химии (обуславливающими в том числе химические взаимодействия).

Однако при этом химическая кинетика является мощной самостоятельной наукой, естественно использующей как собственные методы, так и все содержательные и результативные возможности других наук. Механические процессы уже давно дифференцировались в целый комплекс научных направлений, применяющих и развивающих как результаты других наук, так и свои специфические методы (см., например, обзорную главу 7 по механическим процессам во втором томе Справочника по ПАХТ под ред. А.М. Кутепова).

**1.3.4** Для инженерных расчетов в курсах процессов и аппаратов широко используются также получаемые на основе тех же первичных градиентных законов переноса интегральные «единые кинетические закономерности» (ЕКЗ) в виде обыкновенных дифференциальных уравнений для скоростей гидравлических, тепловых и диффузионных процессов (это была тема докторской диссертации П.Г. Романкова, ЛТИ им. Ленсовета, 1947 г.). Характерно, что эти же ЕКЗ используются в наиболее распространенных РУ-3 для замыкания уравнений полей.

В схожем стиле рассматриваются и излучение, и механические процессы.

Плановским А.Н. была даже выдвинута и осуществлена методологическая идея изложения на базе ЕКЗ также и химических процессов (см., например, самый популярный в СССР и до сих пор в России учебник для механиков, вышедший уже после смерти А.Н. Плановского).

**1.3.5** Для комплексных технологических процессов, включающих **взаимозависимые** явления переноса импульса, тепла, вещества и пр., исходные модели могут комбинироваться в многооператорные линейные или нелинейные уравнения и системы уравнений (теория тепломассообмена, линейная и нелинейная термомеханика необратимых процессов).

Наибольшее распространение в процессах и аппаратах как в России, так и за рубежом для описания таких процессов имеет система уравнений А.В. Лыкова, учитывающая «перекрестные эффекты» и построенная на базе линейной термодинамики необратимых процессов (ТНП) «применительно к переносу энергии и вещества в газовых смесях, растворах, дисперсных системах и пористых телах».

В частности, для тепло- и массопереноса при сушке коллоидных капиллярно-пористых тел «для зональной системы расчета» (при постоянных переносных свойствах в пределах зон) получается модельная система линейных (параболических) взаимосвязанных уравнений, каждое из которых включает по три оператора Лапласа:

$$\partial T / \partial \tau = K_{11} \nabla^2 T + K_{12} \nabla^2 \theta + K_{13} \nabla^2 p ;$$

$$\partial \theta / \partial \tau = K_{21} \nabla^2 T + K_{22} \nabla^2 \theta + K_{23} \nabla^2 p ; \quad (1.42)$$



$$\partial p / \partial \tau = K_{31} \nabla^2 T + K_{32} \nabla^2 \theta + K_{33} \nabla^2 p.$$

В эту «простейшую» общую систему входят 9 термодинамических коэффициентов  $K_{ij}$ , которые выражаются алгебраическими соотношениями, в свою очередь включающими 6 «емкостных» и 6 «кинетических» характеристик переноса (коэффициенты тепло-, массо- и баропроводности  $\lambda$ ,  $D$ ,  $a_p$ ; термо- и барогradientные коэффициенты  $\delta$ ,  $\delta_p$ ; «критерий» фазового превращения  $\epsilon$ ).

Поскольку переносные характеристики фактически в процессе обработки всегда изменяются, должны рассчитываться средние значения всех этих коэффициентов в пределах зон. Нужно определять также границы зон. Если, кроме временных зон, требуется учитывать координатные зоны, то приходится решать задачи для слоистых тел, составных тел или задачи с подвижной границей.

При необходимости учитываются **источники** и стоки.

В аналитических решениях **начальные** условия по зонам должны определяться **функционально** как конечные распределения **предыдущих** зон.

В **граничные** условия дополнительно входят зависимости для внешнего тепло- и массообмена.

При наличии химических или деформационно-реологических превращений систему нужно еще соответственно дополнять.

**1.3.6** В дальнейшем были предложены еще более общие описания, учитывающие:

- конечность скорости высокоинтенсивного переноса (гиперболические уравнения),
- перенос в многокомпонентных и реологически сложных средах,
- перенос в средах с памятью,
- нестационарность и сопряженность внешнего теплообмена и ряд других особенностей сложного совместного переноса.

Основные результаты последних работ А.В. Лыкова приведены в его знаменитом Справочнике по тепломассообмену.

**1.3.7** Предложены также другие фундаментальные («общие» или «конкретные») подходы к описанию и моделированию взаимосвязанных процессов переноса и превращения энергии и вещества, в том числе, в интенсивно развивающейся общей «теории нелинейных процессов».

Последние, во многом принципиально новые подходы, приводят в конечном счете к системам нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, интегро-дифференциальным и интегральным уравнениям, а также используют специфический математический аппарат статистической физики, нелинейной термомеханики и пр. Они моделируют многие специфичные, до сих пор неясные или недоступные для описания в пределах «линейных систем» свойства и взаимодействия, важные и уже нашедшие практические приложения в ряде технологических процессов.

Эти направления открывают также перспективу для подхода к фундаментальной проблеме естествознания – проблеме самоорганизации и структурообразования в природе, в то время как «обычные» градиентные законы переноса описывают процессы, ведущие только к выравниванию потенциалов, в том числе к выводам о тепловой смерти вселенной и пр.

Разрабатываются также универсальные методологические подходы к построению математических моделей различных типов исследуемых объектов, «безотносительно к конкретным областям приложений», в том числе дискретных, статистических, со сложной иерархией, диссипативных, нелинейных, трудно формализуемых не только в естествознании, но и в транспорте, финансах, экономике, в общественных и политических отношениях и пр., например, типа «черного ящика» Винера.

Все эти общие подходы и постановки необходимо учитывать при формулировке конкретных, как правило, приближенных практических задач тепло- и массообмена.

## 1.4 Приближенные постановки задач переноса

**1.4.1** Большинство практических задач при их формулировке стремятся по возможности **упростить**, оставляя в описании только важнейшие, так называемые «**лимитирующие**» члены.

**Предельное** упрощение возможно, например, для стационарных, одномерных и прочих условий и процессов, когда дифференциальные уравнения в **частных** производных (ДУЧП) удастся **свести к обыкновенным** дифференциальным уравнениям (ОДУ).

**Таков классический учебный пример со сведением сложнейших уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье–Стокса к обыкновенному дифференциальному уравнению для самого распространенного случая течения жидкости в трубах, которое легко двукратно интегрируется с получением знаменитого эталонного уравнения Гагена–Пуазейля.**

При современной компьютерной технике **получение ОДУ часто уже рассматривается как решение задачи**, поскольку в большинстве случаев дальнейших вычислительных проблем не возникает.

**1.4.2** Полученные решения выше сформулированных и многих подобных им задач в виде бесконечных рядов в определенных условиях «**регуляризуются**», и в решениях можно с достаточной точностью оставить только один первый член рядов. Это делает такие решения доступными даже для счета «вручную».

Часто их можно использовать также для оценки результатов конечной обработки материалов.

**1.4.3** Резкое упрощение постановки задачи достигается уже при приближенной замене реальной **геометрии** тела на модельную, особенно – канонических форм.

**1.4.4** Для задач теплопереноса и массопереноса особо важными являются случаи упрощений, когда возможны так называемые **безградиентные постановки** задач.

Тогда задача «**чистого**» **нагрева (охлаждения)** сводится к ОДУ балансного типа. Приближенно принимается, что  $T(x, \tau) \approx T_{\text{средн}}(\tau) \approx T(R, \tau)$ . Тогда в левой части уравнения будет изменение количества тепла в теле

$$Q = M_T c \, dT/d\tau, \quad (1.43)$$

а правая часть учитывает внешний теплообмен в зависимости от граничных условий, например, при комбинированном теплоподводе  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ , где

$$Q_1 = Q_{\text{конв}} = q_{\text{конв}} F = \alpha F [T_c - T(R, \tau)], \quad (1.44)$$

$$Q_2 = Q_{\text{изл}} = q_{\text{изл}} F = c_0 \varepsilon_{\text{пр}} \phi F \{T_{\text{изл}}^4 - [T(R, \tau)]^4\}. \quad (1.45)$$

При дополнительном  $Q_{\text{изл}}$  вводится эффективный коэффициент  $\alpha_{\text{изл}}$ . Тогда переменные разделяются, и уравнение легко интегрируется.

**1.4.5** Для задач «**чистой**» **диффузии** все безградиентные постановки будут аналогичны с учетом соответствующей замены тепловых характеристик на их концентрационные и массообменные аналоги.

## 1.5 Взаимосвязанный тепломассоперенос

**1.5.1** Во многих задачах взаимосвязанного тепло- и массопереноса время протекания тепловых и диффузионных процессов соизмеримо. Тогда можно задачу взаимосвязанного переноса «развязать», используя дополнительную температурно-концентрационную зависимость  $T(C)$ , которая задается дополнительно, заменяя многочисленные вышеприведенные переносные коэффициенты («**температурная развязка**», предложенная В.И. Коноваловым).

Так в задачах сушки, если зависимость  $T(u)$  задается отдельным явным выражением, комплексно учитывающим перекрестные эффекты, то источниковые члены удастся учесть в линеаризованных эквивалентных граничных условиях или в эквивалентных переносных коэффициентах. Тогда вышеприведенная взаимосвязанная система уравнений А.В. Лыкова трансформируется к системе двух классических уравнений теплопроводности и диффузии с одним оператором Лапласа

$$\partial P_i / \partial \tau = A_i \nabla^2 P_i. \quad (1.46)$$

Здесь для:

– теплопроводности:  $P \equiv T$ ;  $A \equiv \lambda/c\rho$ ;  $a \equiv c\rho$ ;  $k \equiv \lambda$ ;

– диффузии:  $P \equiv C$  (или  $u$ );  $A \equiv D$ ;  $a \equiv 1$ ;  $k \equiv D$ .

При реализации полученной модели могут использоваться аналитические решения или численные методы, что однако «не является принципиальным».

Решения полученных линейных уравнений находятся для конкретных случаев, например, для многослойных тел канонической формы. Часто достаточно четырех слоев (решения для пластины, цилиндра и шара приведены в пособии далее). При необходимости число слоев может быть произвольным.

Возможно также получение аналитических решений для тел конечных размеров и составных, например, для конечного цилиндра при неоднородных ГУ-3 и функционально заданных по зонам начальных условиях.

Для таких тел и тел более сложной формы и при более сложных краевых условиях возможно также использование численных методов.

**1.5.2** Возможна также «диффузионная развязка», предложенная С.П. Рудобаштой, с постановкой вместо взаимосвязанной задачи – задачи массопроводности (диффузии). Такая постановка целесообразна для материалов с высоким диффузионным сопротивлением, для непористых продуктов, для случаев глубокой сушки.

**1.5.3** Для материалов со сравнимыми термическим и диффузионным сопротивлениями, если они являются **термически тонкими**, целесообразно использовать зависимость между среднемассовыми температурой и влажностью материала.

В простейшем случае **температурно-влажностная зависимость** (ТВЗ) одинакова для всех точек по сечению тела и может быть описана по зонам линейными соотношениями вида

$$T(x, \tau) = T_6 + b_T u(x, \tau), \quad (1.47)$$

здесь  $T_6$  – некоторое «базовое» значение температуры, отсекаемое продолжением отрезка  $T(u)$  на оси ординат;  $b_T = \frac{dT}{du}$  – температурный коэффициент сушки.

Эту температурно-влажностную зависимость можно рассматривать как своего рода интегральную характеристику совокупности тепломассопроводных свойств материала. При этом вместо системы уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса получаем значительно более простые уравнения, аналогичные по форме обычным уравнениям «чистого» теплопереноса, несложного удалением влаги.

Для термически тонких материалов (незначительной толщины или при малой интенсивности процесса) можно пренебречь перепадом температур по сечению тела и принять температуру поверхности тела  $T_{\Pi} = T(R, \tau)$ , примерно равной его среднемассовой температуре  $\bar{T} = \bar{T}(\tau)$ .

Тогда задача взаимосвязанного переноса ставится в виде уравнения теплового баланса

$$-M_T r \frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} + M_T c \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = Q(\tau). \quad (1.48)$$

При комбинированном теплоподводе

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i,$$

где, например:

$$Q_1 = Q_{\text{конв}} = q_{\text{конв}} F = \alpha F [T_C - T(R, \tau)], \quad (1.49)$$

$$Q_2 = Q_{\text{изл}} = q_{\text{изл}} F = c_0 \varepsilon_{\text{пр}} \phi F \{T_{\text{изл}}^4 - [T(R, \tau)]^4\}. \quad (1.50)$$

Замена в уравнениях (1.49), (1.50)  $T_{\Pi}$  на  $\bar{T}$  резко упрощает также задачи экспериментальных исследований, так как отпадает необходимость весьма сложного измерения температурных полей. Упрощается также интегрирование уравнений теплового баланса.

Погрешность в расчете теплового потока в этом случае не превышает допустимой величины ( $\approx 10\%$ ) при условии, что  $Bi_{\text{экв}} < 0,3; 0,4$  и  $0,5$  соответственно для пластины, цилиндра и шара. Здесь  $Bi_{\text{экв}} = d_{\text{экв}}R/\lambda$ , причем

$$\alpha_{\text{экв}} = \alpha \frac{cb_{\Gamma} - \varepsilon}{\frac{r}{cb_{\Gamma} - 1}}, \quad (1.51)$$

где  $\varepsilon$  – критерий фазового превращения.

**1.5.4** В ряде случаев для решения уравнения теплового баланса (1.48) удастся использовать аппроксимацию традиционных **кривых скорости сушки**  $N(\bar{u})$ . Однако это при практических расчетах часто приводит к «нефизичностям» на стыках периодов и зон.

**1.5.5** В результате оказывается возможным поставить задачи, допускающие аналитические решения для взаимосвязанного переноса, позволяющие рассчитать для всего процесса обе кинетические кривые: средние концентрации  $C(\tau)$  (влажностержения  $\bar{u}(\tau)$  при сушке) и температуры  $\bar{T}(\tau)$ .

## 2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

**2.1** Существуют различные **классификации** методов решения задач тепло- и массопереноса, теплопроводности и диффузии, а в целом также дифференциальных уравнений в частных производных, иногда сводимых к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Все они в основном дополняют друг друга, учитывая те или иные особенности методов **получения решений** (см., например, книги Л.А. Коздобы, А.Д. Полянина и др.) и их **последующей реализации** для инженерных расчетов.

**2.2** Все способы **решений** можно делить на **аналитические** методы и на **численные** методы.

**Аналитические** методы решений (не самих постановок задач) можно делить на **точные** и **приближенные**.

**Численные** решения всегда являются **приближенными**.

Численные и аналитические методы имеют свои преимущества и недостатки. Причем, как правило, преимуществу одного метода соответствует недостаток второго. Например: численные методы позволяют решать сложные краевые задачи, решение которых аналитически либо невозможно, либо сопряжено с большими трудностями. Аналитические методы, представляющие решение в виде функции, позволяют анализировать влияние исходных параметров на результат решения, что трудно выполнить при численных методах.

**2.3 Точные аналитические** методы предусматривают получение решения в виде элементарных или специальных алгебраических функций, обычно входящих в ряды.

Часто аналитическим решением можно считать, как уже говорилось выше, представление задачи в виде определенного интеграла («квadrатуры»), а иногда даже в виде обыкновенного дифференциального уравнения без осложняющих особенностей.

**2.4 Приближенные аналитические** методы предусматривают получение приближенного решения в результате преобразования, разбиения или упрощения исходной точной постановки задачи (например: **асимптотические** методы; **интервальные** методы).

Важно также отметить возможность приближенного решения нелинейных задач и задач взаимосвязанного переноса. Решение подобных практических задач в точной аналитической форме удается редко.

**2.5 Реализация** всех видов решений – всегда **численная и приближенная**. Для этого используется ручной счет, расчеты на калькуляторах, а чаще всего в настоящее время – компьютерные расчеты.

Компьютерные программы могут разрабатываться специально для полученных решений или могут использоваться пакеты программ, разрабатываемые компьютерными фирмами.

Для оценочных и экспрессных инженерных расчетов в ряде случаев используются таблицы, номограммы и графики.

**2.6** Для **аналитического** решения линейных задач теплопроводности (диффузии) в слоистых телах применяются основные классические методы:

- метод разделения переменных (метод Фурье),
- метод источников (или метод функций Грина),
- методы преобразования Лапласа и другие методы интегральных преобразований.

Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки. Для практических решений обычно определяющими являются простота их освоения и применения, а также громоздкость получаемого решения.

**2.7** В данном пособии будем рассматривать прежде всего аналитические решения уравнений теплопроводности и диффузии в частных производных в линейных постановках.

Для получения аналитического решения задач теплопроводности (диффузии) в слоистых телах различной формы используем **метод разделения переменных** или **метод Фурье**.

Для простоты изложения метода Фурье вначале рассматривается решение задачи теплопроводности в однослойной одномерной бесконечной пластине без внутренних тепловых источников. Для удобства объяснения и записи решения температурное поле и поле концентраций обозначается как поле произвольного потенциала переноса  $P(x, \tau)$ .

**2.8** Также будут рассмотрены подходы к **приближенному** решению нелинейных и взаимосвязанных задач переноса **интервальными** методами.

**2.9** Рассматриваются решения **безградиентных** задач переноса для тонких тел в двух основных вариантах:

- при известной ТВЗ  $T(u)$  – **аналитическим** интегрированием с последующим **вычислением квадратуры** численными методами, например, методом Симпсона;
- при известной аппроксимации скорости убыли массы  $N(u)$  – **непосредственно численным интегрированием** получаемого **обыкновенного** дифференциального уравнения, например, методом Рунге-Кутты.

### **3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ**

#### **ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПАХТ**

##### **Структура раздела**

- 3.1 Решение задачи теплопроводности (диффузии) в однослойной пластине с использованием метода Фурье
- 3.2 Двухслойная задача теплопроводности (диффузии) для пластины
- 3.3 Четырехслойные задачи теплопроводности (диффузии) для пластины, цилиндра и шара
- 3.4 Регулярные решения
- 3.5 Безградиентные задачи
- 3.6 К решению задач взаимосвязанного теплообмена
- 3.7 К решению нелинейных задач теплопроводности и диффузии

##### **3.1 Решение задачи теплопроводности (диффузии) с использованием метода Фурье**

**3.1.1** Для простоты изложения метода разделения переменных Фурье рассмотрим решение задачи теплопроводности в однослойной одномерной бесконечной пластине без внутренних тепловых источников. Для удобства объяснения и записи решения обозначим температурное или концентрационное поле как поле потенциала  $P(x, \tau)$ .

Постановка задачи:

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 P(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (3.1.1)$$

$$P(0, \tau) = 0, \quad (3.1.2)$$

$$P(\delta, \tau) = 0, \quad (3.1.3)$$

$$P(x, 0) = \psi(x). \quad (3.1.4)$$

Суть метода состоит в поиске нетривиального решения дифференциального уравнения (3.1.1) в виде произведения функции координаты на функцию времени

$$P(x, \tau) = X(x)T(\tau), \quad (3.1.5)$$

удовлетворяющего краевым условиям (3.1.2) – (3.1.3).

Подставляем (3.1.5) в (3.1.1), дифференцируем по соответствующим переменным и приходим к выражению

$$X(x)T'(\tau) = aX''(x)T(\tau). \quad (3.1.6)$$

Оставим в левой части равенства функции, зависящие только от  $x$ , а в правой только от  $\tau$ . Получим выражение, определяющее равенство двух дробей, каждая из которых зависит либо только от  $x$ , либо только от  $\tau$ . Такая операция и называется разделением переменных

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{aT(\tau)}. \quad (3.1.7)$$

Равенство (3.1.7) справедливо лишь только в случае, когда общая величина отношений (3.1.7) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через  $\mu$  и получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{aT(\tau)} = -\mu. \quad (3.1.8)$$

Из равенства (3.1.8) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения вида:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0; \quad (3.1.9)$$

$$T'(\tau) + \mu a T(\tau) = 0. \quad (3.1.10)$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (3.1.1) вида (3.1.5), удовлетворяющее краевым условиям, необходимо, чтобы функция  $X(x)$  удовлетворяла граничным условиям. Таким образом, приходим к задаче о нахождении таких значений  $\mu$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3.1.9), удовлетворяющие граничным условиям. Значения  $\mu$ , для которых задача имеет нетривиальное решение, называются собственными числами, а сами эти решения – собственными функциями. Задача нахождения собственных чисел называется задачей Штурма–Лиувилля.

Решением задачи Штурма–Лиувилля является ряд ненулевых положительных значений собственных чисел  $\mu_n$  ( $n = 1 \dots \infty$ ). Соответственно функциональный вид решения для собственных чисел будет определяться граничными условиями. В общем случае для некоего  $k$ -го ненулевого положительного собственного числа можно записать

$$\mu_k = \varphi(k). \quad (3.1.11)$$

Для любого ненулевого положительного значения  $\mu_k$  будет справедливо решение уравнения (3.1.9) в виде

$$X_k(x) = f(\mu_k, x). \quad (3.1.12)$$

Соответственно для любого ненулевого положительного значения  $\mu_k$  решение уравнения (3.1.10) будет иметь вид

$$T_k(\tau) = A_k \exp(-\mu_k^2 a \tau). \quad (3.1.13)$$

Таким образом, функция

$$P_k(x, \tau) = X_k(x) T_k(\tau) \quad (3.1.14)$$

является решением уравнения (3.1.1) при определенных граничных условиях.

В силу линейности и однородности уравнения (3.1.1) всякая конечная сумма решений будет также решением. Таким образом, решение (3.1.14) задачи (3.1.1) можно преобразовать к виду

$$P(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(\tau) \quad (3.1.15)$$

или с учетом (3.1.13) к виду

$$P(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \exp(-\mu_n^2 a \tau). \quad (3.1.16)$$

Явный вид функции (3.1.12) определяется из граничных условий.

Остается определить вид  $A_n$  в уравнении (3.1.16). Для этого используем начальные условия (3.1.4).

В начальный момент времени  $\tau = 0$ . Соответственно в левой части уравнения (3.1.16) получим явный вид функции, определяющей начальное условие, а в правой части экспонента будет равна 1, то есть

$$\psi(x) = P(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x). \quad (3.1.17)$$

Соответственно вид  $A_n$  определится из разложения функции начального условия в ряд Фурье. Таким образом, с учетом начальных и граничных условий получаем аналитическое представление решения задачи (3.1.1) в виде (3.1.16).

**3.1.2** Рассмотрим использование метода разделения переменных для решения ряда краевых задач на примерах

### Пример № 3.1

Найти решение задачи теплопроводности однослойной одномерной бесконечной пластины толщиной  $l$ . Теплопроводность пластины  $\lambda$ , плотность  $\rho$ , теплоемкость  $c$ . Тепловые источники в пластине отсутствуют.

В начальный момент времени температурное поле внутри пластины описывается уравнением  $f(x) = T_0$ . На поверхностях пластины поддерживается постоянная температура  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$ .

*Постановка задачи:*

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 P(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (3.1.18)$$

$$P(x, 0) = f(x) = T_0; \quad (3.1.19)$$

$$P(0, \tau) = T_{c1}; \quad (3.1.20)$$

$$P(l, \tau) = T_{c2}. \quad (3.1.21)$$

*Решение системы (3.1.18) – (3.1.21) получим в виде функции*

$$P(x, \tau) = V(x, \tau) + W(x), \quad (3.1.22)$$

где  $V(x, \tau)$  – функция распределения температуры в любой момент времени при граничных условиях вида:

$$P(0, \tau) = 0, \quad (3.1.23)$$

$$P(l, \tau) = 0; \quad (3.1.24)$$

$W(x)$  – функция, определяющая стационарное распределение температуры при граничных условиях (3.1.20) – (3.1.21).

Соответственно уравнению (3.1.22) система (3.1.18) – (3.1.21) преобразуется в две системы:

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0, \quad (3.1.25)$$

$$W(0, \tau) = T_{c1}, \quad (3.1.26)$$

$$W(l, \tau) = T_{c2}. \quad (3.1.27)$$

и

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (3.1.28)$$

$$V(x, 0) = \psi(x) = f(x) - W(x), \quad (3.1.29)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad (3.1.30)$$

$$V(l, \tau) = 0. \quad (3.1.31)$$

Решение уравнения (3.1.25) известно

$$W(x) = C_1 x + C_2. \quad (3.1.32)$$

Для определения явного вида коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в уравнении (3.1.32) используем граничные условия вида (3.1.26), (3.1.27). Отсюда получаем:

$$C_1 = (T_{c2} - T_{c1}) / l, \quad (3.1.33)$$

$$C_2 = T_{c1}. \quad (3.1.34)$$

Теперь необходимо получить решение краевой задачи (3.1.28) – (3.1.31).

Используем метод разделения переменных. Получим уравнения вида (3.1.9), (3.1.10).

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (3.1.28), удовлетворяющее граничным условиям (3.1.30), (3.1.31), найдем решение уравнения (3.1.9), удовлетворяющее (3.1.30), (3.1.31).

Получим задачу Штурма–Лиувилля в виде:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad (3.1.35)$$

$$X(0) = 0, \quad (3.1.36)$$

$$X(l) = 0. \quad (3.1.37)$$

Из теории дифференциальных уравнений в случае (3.1.35) – (3.1.37) возможны три варианта решения: а) при  $\mu < 0$ , б) при  $\mu = 0$ , в) при  $\mu > 0$ .

Нам необходимо найти ряд ненулевых положительных значений  $\mu$ . Соответственно при  $\mu > 0$  решение уравнения (3.1.35) имеет вид

$$X(x) = C_3 \cos(\mu x) + C_4 \sin(\mu x). \quad (3.1.38)$$



Решаем (3.1.38), исходя из(3.1.36) – (3.1.37), и получаем:

$$C_3 = 0, \quad (3.1.39)$$

$$C_4 \sin(\mu x) = 0. \quad (3.1.40)$$

Так как необходимо получить нетривиальное решение, то  $C_4 \neq 0$ . Следовательно

$$\sin(\mu x) = 0. \quad (3.1.41)$$

Равенству (3.1.41), определяющему решение задачи Штурма-Лиувилля, соответствует

$$\mu_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2 \dots \infty. \quad (3.1.42)$$

Таким образом, определили вид  $X(x)$ .

Как уже отмечалось выше, для любого ненулевого положительного значения  $\mu_k$  решение уравнения (3.1.10) будет иметь вид

$$T_k(\tau) = A_k \exp(-\mu_k^2 a\tau). \quad (3.1.43)$$

Соответственно

$$V(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a\tau\right). \quad (3.1.44)$$

Определим  $A_n$  из начального условия (3.1.29)

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x). \quad (3.1.45)$$

Найдем вид  $A_n$ , используя свойство ортогональности функции  $\sin(\mu_n x)$  (вообще говоря, ортогональность функции необходимо доказать и найти коэффициент ортогональности. Мы не будем этого делать, отметим лишь, что для  $\sin(\mu_n x)$  коэффициент ортогональности равен 1).

По условию ортогональности функции:

$$\int_0^l X_n(x) X_k(x) dx = 0, \quad (3.1.46)$$

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{l}{2}. \quad (3.1.47)$$

Умножим обе части уравнения (3.1.45) на  $X_k(x)$

$$\psi(x) X_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) X_k(x). \quad (3.1.48)$$

Проинтегрируем обе части (3.1.48) от 0 до  $l$

$$\int_0^l \psi(x) X_k(x) dx = A_n \int_0^l \left( \sum_{n \neq k}^{\infty} X_n(x) X_k(x) + X_n^2(x) \right) dx. \quad (3.1.49)$$

Учитывая (3.1.46) и (3.1.17), первое слагаемое под интегралом в скобках находим равным 0, а второе равным  $l/2$ . В результате получим

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx. \quad (3.1.50)$$

Интеграл (3.1.50), при известном виде функции  $\psi(x)$ , можно взять аналитически.

Таким образом, получаем решение задачи (3.1.18) – (3.1.21) в виде

$$P(x, \tau) = \frac{T_{c2} - T_{c1}}{l} x + T_{c1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^l \left( T_0 - \frac{T_{c2} - T_{c1}}{l} x - T_{c1} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a \tau\right) \right). \quad (3.1.51)$$

### Пример № 3.2

Найти решение задачи теплопроводности двухслойной одномерной бесконечной пластины, составленной из двух однослойных одномерных бесконечных пластин толщиной  $l_1$  и  $l_2$ . Свойства пластин: теплопроводность  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , плотность  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , теплоемкость  $c_1$  и  $c_2$  соответственно. Тепловые источники в пластинах отсутствуют. В начальный момент времени температурное поле внутри пластин описывается уравнениями: для первой пластины  $\psi_1(x)$ , для второй пластины  $\psi_2(x)$ . На поверхностях пластин, контактирующих с окружающей средой, происходит теплообмен по закону Ньютона. Коэффициент внешней теплоотдачи для первой пластины  $\alpha_1$ , для второй  $\alpha_2$ . Температура окружающей среды для каждой пластины равна 0.

*Постановка задачи:*

$$\frac{\partial P_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 P_i(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}, \quad (3.1.52)$$

$$\frac{\partial P_1(0, \tau)}{\partial x} - h_1 P_1(0, \tau) = 0, \quad (3.1.53)$$

$$\frac{\partial P_2(l_2, \tau)}{\partial x} + h_2 P_2(l_2, \tau) = 0, \quad h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, \quad (3.1.54)$$

$$P_1(l_1, \tau) = P_2(0, \tau), \quad (3.1.55)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P_1(l_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial P_2(0, \tau)}{\partial x}, \quad (3.1.56)$$

$$P_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2. \quad (3.1.57)$$

*Решение задачи* (3.1.52) – (3.1.57) согласно методу Фурье будем искать в виде:

$$P_1(x, \tau) = X_1(x)T(\tau), \quad (3.1.58)$$

$$P_2(x, \tau) = X_2(x)T(\tau). \quad (3.1.59)$$

Если разделить переменные в форме

$$a \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}, \quad (3.1.60)$$

то решение для  $T(\tau)$  будет получено в виде

$$T(\tau) = \exp(-\mu^2 \tau). \quad (3.1.61)$$

Соответственно (3.1.60), применяя рассуждения, аналогичные приведенным в примере № 4, получим решение для  $X_i(x)$

$$X_i(x) = A_i \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_i\right), \quad i = 1, 2. \quad (3.1.62)$$

Таким образом, общее решение задачи (3.1.52) – (3.1.57) будем искать в виде:

$$P_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \exp(-\mu_n^2 \tau) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_1\right), \quad (3.1.63)$$

$$P_2(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \exp(-\mu_n^2 \tau) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_2\right). \quad (4.1.64)$$

Используем стыковые условия (3.1.55 – (3.1.56):

$$A_{1n} \exp(-\mu_n^2 \tau) \sin\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) = A_{2n} \exp(-\mu_n^2 \tau) \sin(\varphi_{2n}), \quad (3.1.65)$$

$$\lambda_1 \frac{A_{1n}}{\sqrt{a_1}} \cos\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) = \lambda_2 \frac{A_{2n}}{\sqrt{a_2}} \cos(\varphi_{2n}). \quad (3.1.66)$$

Исключим из (3.1.65) и (3.1.66)  $A_{in}$ , разделив (3.1.65) на (3.1.66):

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) = \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\varphi_{2n}). \quad (3.1.67)$$

Подставляем (3.1.63) и (3.1.64) в граничные условия (3.1.53) – (3.1.54)

$$\frac{\mu_n}{\sqrt{a_1}} \cos(\varphi_{1n}) = h_1 \sin(\varphi_{1n}), \quad (3.1.68)$$

и получаем

$$\varphi_{1n} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_n}{h_1 \sqrt{a_1}}\right), \quad (3.1.69)$$

$$\frac{\mu_n}{\sqrt{a_2}} \cos\left(\frac{\mu_n l_2}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) + h_2 \sin\left(\frac{\mu_n l_2}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) = 0, \quad (3.1.70)$$

следовательно,

$$\varphi_{2n} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_n}{h_2 \sqrt{a_2}}\right) - \frac{\mu_n l_2}{\sqrt{a_2}}. \quad (3.1.71)$$

Уравнения (3.1.69), (3.1.71) с учетом (3.1.67) определяют решение задачи о собственных числах. Соответственно (3.1.66) получаем

$$A_{2n} = A_{1n} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right)}{\sin(\varphi_{2n})}. \quad (3.1.72)$$

Обозначим

$$M_n = \frac{\sin\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right)}{\sin(\varphi_{2n})}, \quad (3.1.73)$$

то есть

$$A_{2n} = A_{1n} M_n. \quad (3.1.74)$$

Вид  $A_{1n}$  определим из начальных условий (3.1.57) из условия ортогональности функций  $X_i(x)$  на отрезке  $(l_1 + l_2)$ .

В данном случае условие ортогональности имеет вид

$$\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} X_{1n}(x) X_{2n}(x) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} \int_0^{l_2} X_{1n}(x) X_{2n}(x) dx = \begin{cases} \text{const}, & k \neq n \\ 0, & k = n \end{cases}. \quad (3.1.75)$$

Соответственно получим

$$A_{1n} = \frac{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \psi_1(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} \psi_2(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}. \quad (3.1.76)$$

Таким образом, уравнения (3.1.63), (3.1.64), (3.1.67), (3.1.69), (3.1.71), (3.1.73), (3.1.74) и (3.1.76) полностью определяют аналитическое решение поставленной краевой задачи (3.1.52) – (3.1.57).

### 3.2 Двухслойная задача теплопроводности (диффузии) для пластины

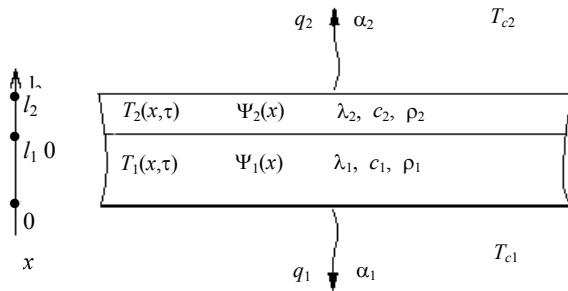
Дадим постановку задачи, решение задачи и условия реализации решения в сводном виде.

Схема двухслойной несимметричной задачи **теплопроводности** приведена на рис. 3.1.

На схеме и далее в тексте используются следующие обозначения и соотношения:

$T(x, \tau)$  – искомое распределение температур в пластине по координате и во времени;

$q_1 = \alpha_1(T_1(0, \tau) - T_{c1})$ ;  $q_2 = \alpha_2(T_2(l_2, \tau) - T_{c2})$  – удельные потоки тепла от тела в окружающую среду;



**Рис. 4.1** Схема двухслойной несимметричной задачи теплопроводности

$h_1 = \alpha_1/\lambda_1$ ;  $h_2 = \alpha_2/\lambda_2$  – соотношения коэффициентов теплоотдачи и теплопроводности (размерность 1/м);

$\psi(x) = T(x, 0)$  – произвольное начальное распределение температур в теле.

$$\frac{\partial T_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 T_i(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}; \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} - h_1(T_1(0, \tau) - T_{c1}) = 0; \quad (3.2.2)$$

*Постановка задачи:*

$$\frac{\partial T_2(l_2, \tau)}{\partial x} - h_2(T_2(l_2, \tau) - T_{c2}) = 0, \quad h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_i}; \quad (3.2.3)$$

$$T_1(l_1, \tau) = T_2(0, \tau); \quad (3.2.4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(l_1, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x} \quad (3.2.5)$$

$$T_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2. \quad (3.2.6)$$

*Решение задачи*, полученное методом Фурье, имеет вид

$$T_i(x, \tau) = W_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (4.2.7)$$

где

$$\varphi_{1n} = \text{arctg}\left(\frac{\mu_n}{h_1 \sqrt{a_1}}\right); \quad (3.2.8)$$

$$\varphi_{2n} = -\arctg\left(\frac{\mu_n}{h_2\sqrt{a_2}}\right) - \frac{\mu_n l_2}{\sqrt{a_2}}; \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) = \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\varphi_{2n}). \quad (4.2.10)$$

совокупность этих трех уравнений (3.2.8) – (3.2.10) позволяет определить  $n$  последовательных значений  $\varphi_{in}, \mu_n$ ;

$$A_{2n} = A_{1n} M_n; \quad (3.2.11)$$

$$M_n = \frac{\sin\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right)}{\sin(\varphi_{2n})}; \quad (3.2.12)$$

$$A_{1n} = \frac{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \theta_1(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} \theta_2(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}; \quad (3.2.13)$$

$$\theta_i(x) = \psi_i(x) - W_i(x). \quad (3.2.14)$$

Для **реализации** интервального метода счета решение необходимо записать сначала для первого интервала, например, при безградиентных НУ, а затем для  $n$  последующих, в которых НУ для начала  $n$ -го интервала равны распределению в конце  $(n-1)$ -го интервала. Им соответствуют индексы  $bz$  – начало интервала (зоны) и  $ez$  – конец интервала (зоны).

1) для первого интервала с безградиентными НУ

$$T_i(x, \tau) = W_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (3.2.15)$$

где значения параметров, входящих в (3.2.15), определяются из (3.2.8) – (3.2.14);

2) для последующих интервалов решения записываем для начала ( $bz$ ) и конца ( $ez$ ) интервала

$$T_{ibz}(x, \tau) = W_i(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \sin\left(\frac{\mu_k x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{ik}\right) \exp(-\mu_k^2 \tau), \quad (3.2.16)$$

где  $A_{ik}, m_k, f_{ik}$  в начале интервала известны (они рассчитываются как переменные в конце предыдущего интервала) и принимаются для данного интервала;

$$\begin{aligned} T_{1ez}(x, \tau) &= W_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) = \\ &= W_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \theta_1(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} \theta_2(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}{\frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx} \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau); \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$T_{2ez}(x, \tau) = W_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau). \quad (3.2.18)$$

В решении для конца интервала в качестве начального распределения температуры в  $\theta_1(x)$ ,  $\theta_2(x)$  (уравнение (3.2.14)) необходимо взять распределение температуры в конце предыдущего интервала, то есть:

$$\theta_1(x) = T_{1bz}(x, \square) - W_1(x); \quad (3.2.19)$$

$$\theta_2(x) = T_{2bz}(x, \square) - W_2(x). \quad (3.2.20)$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} T_{1ez}(x, \tau) &= W_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) = W_1(x) + \\ &+ \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} (T_{1bz}(x, \tau) - W_1(x)) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1 \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}{\lambda_1 \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx} \rightarrow \\ &+ \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} (T_{2bz}(x, \tau) - W_2(x)) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx \\ &\rightarrow \frac{\lambda_1 \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx}{\lambda_1 \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx} \times \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) = \\ &= W_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \sin\left(\frac{\mu_k x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1k}\right) \exp(-\mu_k^2 \tau_k) \right) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \right. \\ &+ \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sin\left(\frac{\mu_k x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2k}\right) \exp(-\mu_k^2 \tau_k) \right) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx \left. / \right. \\ &\left. / \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx \times \right. \\ &\left. \times \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (3.2.21) \right. \end{aligned}$$

где  $\tau = \tau_k$  – продолжительность интервала;

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \left( \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \sin\left(\frac{\mu_k x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1k}\right) \exp(-\mu_k^2 \tau_k) \right) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \right. \\ &+ \frac{\lambda_2}{a_2} M_n \int_0^{l_2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sin\left(\frac{\mu_k x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2k}\right) \exp(-\mu_k^2 \tau_k) \right) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx \left. / \right. \\ &\left. / \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) dx + \frac{\lambda_2}{a_2} M_n^2 \int_0^{l_2} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) dx, \quad (3.2.22) \right. \end{aligned}$$

$$T_{2ez}(x, \tau) = W_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} M_n \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \quad (3.2.23)$$

Значения параметров, входящих в (3.2.23), также определяются из соотношений (3.2.21), (3.2.22).

Кроме того, рассчитываются средние значения температур

$$\bar{T}_i(\tau) = \frac{\int_0^{l_i} T_i(x, \tau) dx}{l_i}. \quad (3.2.24)$$

Для влажных материалов берутся **среднемассовые** температуры.

Для задач **диффузии** используются эти же решения, с заменами:

$$a \equiv D; \quad \lambda \equiv D;$$

$$h_1 \equiv \beta_1/D_1; \quad h_2 \equiv \beta_2/D_2; \quad (3.2.25)$$

$$\alpha_1 (T_1(0, \tau) - T_{c1}) \equiv \beta_1(C(0, \tau) - C_{c1});$$

$$\alpha_2 (T_2(l, \tau) - T_{c2}) \equiv \beta_2(C(l, \tau) - C_{c2}). \quad (3.2.26)$$

### 3.3 Четырехслойные задачи теплопроводности (диффузии) для пластины, цилиндра и шара

#### 3.3.1 Четырехслойная пластина

Постановка задачи:

$$\frac{\partial P_i(x, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 P_i(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}; \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial P_1(0, \tau)}{\partial x} - h_1(P_1(0, \tau) - P_{c1}) = 0; \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial P_n(l_2, \tau)}{\partial x} - h_2(P_n(l_2, \tau) - P_{c2}) = 0, \quad h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_4}; \quad (3.3.3)$$

$$P_j(l_j, \tau) = P_{j+1}(0, \tau); \quad (3.3.4)$$

$$\lambda_j \frac{\partial P_j(l_j, \tau)}{\partial x} = \lambda_{j+1} \frac{\partial P_{j+1}(0, \tau)}{\partial x}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.3.5)$$

$$P_i(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.6)$$

Решение задачи (3.3.1) – (3.3.6), полученное методом Фурье, имеет вид

$$P_i(x, \tau) = W_i(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.7)$$

Вид и параметры функций  $W_i(x)$  определяются для стационарного распределения температур.

$$\varphi_{1n} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_n}{h_1 \sqrt{a_1}}\right); \quad (3.3.8)$$

$$\varphi_{4n} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_n}{h_2 \sqrt{a_4}}\right) - \frac{\mu_n l_4}{\sqrt{a_4}}; \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n l_1}{\sqrt{a_1}} + \varphi_{1n}\right) = \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \operatorname{tg}(\varphi_{2n}); \quad (3.3.10)$$

$$\frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n l_2}{\sqrt{a_2}} + \varphi_{2n}\right) = \frac{\sqrt{a_3}}{\lambda_3} \operatorname{tg}(\varphi_{3n}); \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\sqrt{a_3}}{\lambda_3} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n l_3}{\sqrt{a_3}} + \varphi_{3n}\right) = \frac{\sqrt{a_4}}{\lambda_4} \operatorname{tg}(\varphi_{4n}). \quad (3.3.12)$$

Система (3.3.8) – (3.3.12) позволяет определить  $n$  последовательных значений  $\varphi_{in}, \mu_n$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

$$A_{(j+1)n} = A_{jn} M_{(j+1)n}, \quad M_{1n} = 1; \quad (3.3.13)$$

$$M_{(j+1)n} = \frac{\prod_{r=1}^{j+1} \sin\left(\frac{\mu_n r}{\sqrt{a_r}} + \varphi_{rn}\right)}{\prod_{r=1}^j \sin(\varphi_{rn})}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.3.14)$$

$$A_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{a_i} M_{in}^2 \int_0^{l_i} \theta_i(x) \sin\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in}\right) dx_i}{\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{a_i} M_{in}^2 \int_0^{l_i} \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in}\right) dx_i}; \quad (3.3.15)$$

$$\theta_i(x) = \psi_i(x) - W_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.16)$$

### 3.3.2 Четырехслойный цилиндр

*Постановка задачи:*

$$\frac{\partial P_i(r, \tau)}{\partial \tau} = a_i \left( \frac{\partial^2 P_i(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_i(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}; \quad (3.3.17)$$

$$\frac{\partial P_1(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (3.3.18)$$

$$\frac{\partial P_4(R_4, \tau)}{\partial r} - h(P_4(R_4, \tau) - P_c) = 0, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda_4}; \quad (3.3.19)$$

$$P_i(R_i, \tau) = P_{i+1}(R_{i+1}, \tau); \quad (3.3.20)$$

$$\lambda_i \frac{\partial P_i(R_i, \tau)}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial P_{i+1}(R_{i+1}, \tau)}{\partial r}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.3.21)$$

$$P_i(r, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.22)$$

*Решение задачи (3.3.17) – (3.3.22), полученное методом Фурье:*

$$P_i(r, \tau) = P_c + \sum_{n=1}^{\infty} \left( M_{in} J_0\left(\frac{\mu_n r}{\sqrt{a_i}}\right) + N_{in} Y_0\left(\frac{\mu_n r}{\sqrt{a_i}}\right) \right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (3.3.23)$$

где



$$N_{(i+1)n} = \frac{1}{Y_0 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right)} \left( M_{in} J_0 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) + N_{in} Y_0 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) \right) - M_{(i+1)n} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right); \quad (3.3.24)$$

$$M_{(i+1)n} = \frac{1}{J_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) Y_0 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) - J_0 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) Y_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right)} \frac{\lambda_i a_{i+1}}{\lambda_{i+1} a_i} \times$$

$$\times \left( M_{in} J_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) + N_{in} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right) \right) - M_{(i+1)n} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} \right), \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.3.25)$$

$$M_{1n} = 1; \quad N_{1n} = 0; \quad (3.3.26)$$

$$M_{2n} \left( \frac{\lambda_2}{\alpha \sqrt{a_2}} J_1 \left( \frac{\mu_n R_2}{\sqrt{a_2}} \right) - J_0 \left( \frac{\mu_n R_2}{\sqrt{a_2}} \right) \right) = N_{2n} \left( Y_0 \left( \frac{\mu_n R_2}{\sqrt{a_2}} \right) - \frac{\lambda_2}{\alpha \sqrt{a_2}} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_2}{\sqrt{a_2}} \right) \right); \quad (3.3.27)$$

$$M_{3n} \left( \frac{\lambda_3}{\alpha \sqrt{a_3}} J_1 \left( \frac{\mu_n R_3}{\sqrt{a_3}} \right) - J_0 \left( \frac{\mu_n R_3}{\sqrt{a_3}} \right) \right) = N_{3n} \left( Y_0 \left( \frac{\mu_n R_3}{\sqrt{a_3}} \right) - \frac{\lambda_3}{\alpha \sqrt{a_3}} Y_1 \left( \frac{\mu_n R_3}{\sqrt{a_3}} \right) \right). \quad (3.3.28)$$

### 3.3.3 Четырехслойный шар

Постановка задачи:

$$\frac{\partial P_i(r, \tau)}{\partial \tau} = a_i \left( \frac{\partial^2 P_i(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P_i(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad a_i = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}; \quad (3.3.29)$$

$$\frac{\partial P_1(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (3.3.30)$$

$$\frac{\partial P_4(R_4, \tau)}{\partial r} - h(P_4(R_4, \tau) - P_c) = 0, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda_4} \quad (3.3.31)$$

$$P_i(R_i, \tau) = P_{i+1}(R_i, \tau); \quad (3.3.32)$$

$$\lambda_{li} \frac{\partial P_i(R_i, \tau)}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial P_{i+1}(R_i, \tau)}{\partial r}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.3.33)$$

$$P_i(r, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.34)$$

Решение задачи (3.3.29) – (3.3.34), полученное методом Фурье:

$$P_i(r, \tau) = P_c + \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \frac{1}{r} \cdot \sin \left( \frac{\mu_n r}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in} \right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (3.3.35)$$

где

$$\varphi_{1n} = n\pi; \quad (3.3.36)$$

$$\varphi_{in} = \text{arcctg}(\arg_i) - \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}}; \quad (3.3.37)$$

$$\arg_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\lambda_i R_{i-1} \mu_n} \left( \frac{\lambda_i R_{i-1} \mu_n}{\sqrt{a_{i-1}}} \text{ctg} \left( \frac{\mu_n R_{i-1}}{\sqrt{a_{i-1}}} + \varphi_{(i-1)n} \right) + \lambda_i - \lambda_{i-1} \right); \quad (3.3.38)$$

$$\left(\frac{1}{R_{i-1}} - h\right) \operatorname{tg} \left( \frac{\mu_n R_i}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in} \right) = \frac{\mu_n}{\sqrt{a_i}}, \quad i = 2, 3, 4. \quad (3.3.39)$$

Система (3.3.35) – (3.3.39) позволяет определить  $n$  последовательных значений  $\varphi_{in}$ ,  $\mu_n$

$$M_{1n} = 1; \quad A_{(j+1)n} = A_{1n} M_{(j+1)n}; \quad (3.3.40)$$

$$M_{(j+1)n} = \frac{\prod_{r=1}^{j+1} \sin \left( \frac{\mu_n R_r}{\sqrt{a_r}} + \varphi_{rn} \right)}{\prod_{r=1}^j \sin \left( \frac{\mu_n R_{r+1}}{\sqrt{a_{r+1}}} + \varphi_{(r+1)n} \right)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.3.41)$$

$$A_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{a_i} M_{in} \int_{R_{i-1}}^{R_i} \theta_i(r) r \sin \left( \frac{\mu_n r}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in} \right) dr}{\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_i}{a_i} M_{in}^2 \int_{R_{i-1}}^{R_i} \sin^2 \left( \frac{\mu_n r}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{in} \right) dr}, \quad R_0 = 0; \quad (3.3.42)$$

$$\theta_i(x) = \psi_i(x) - P_c, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3.43)$$

Для задач **диффузии** используются эти же решения, с заменами:

$$a \equiv D; \quad \lambda \equiv D;$$

$$h_1 \equiv \beta_1/D_1; \quad h_2 \equiv \beta_2/D_2; \quad (3.3.44)$$

$$\alpha_1(T_1(0, \tau) - T_{c1}) \equiv \beta_1(C(0, \tau) - C_{c1});$$

$$\alpha_2(T_2(l, \tau) - T_{c2}) \equiv \beta_2(C(l, \tau) - C_{c2}). \quad (3.3.45)$$

### 3.4 Регулярные решения

При достаточно большом времени от начала процесса в решении задач часто можно с хорошей точностью удовлетвориться **одним первым членом ряда**, так как остальные оказываются достаточно малыми и ими можно пренебречь. Это так называемые **регулярные режимы** и решения.

Различают, по терминологии Г.М. Кондратьева (см. также книги А.В. Лыкова, Н.А. Ярышева), регулярные режимы **1-го, 2-го и 3-го рода** для нагрева (охлаждения) тел при постоянной температуре среды, при линейном изменении ее во времени и при изменении температуры среды по гармоническому закону.

В наших случаях регулярность обеспечивает возможность **упрощения счета**, так как он может производиться даже вручную или на калькуляторе.

Существенное значение регулярность имеет также для **температурных измерений**, особенно в телах сложной формы, и для экспериментальной техники **определения теплофизических свойств**.

### 3.5 Безградиентные задачи

Допущение безградиентности, как уже говорилось, дает возможность **свести задачу в ДУЧП к задаче ОДУ**.

В зависимости от **вида задачи** могут быть следующие варианты:

- чисто тепловая задача;
- чисто диффузионная задача.

В зависимости от **вида граничных условий** встречаются задачи:

– при постоянных ГУ (когда  $T_c = \text{const}$ ): ГУ-3; ГУ-2; при постоянных ГУ-1 задача становится тривиальной;

– при переменных ГУ-3, ГУ-2, ГУ-1, когда  $T_c = T_c(\tau)$ .

Для взаимосвязанных задач переноса, рассматриваемых ниже, могут быть варианты задач:

– тепло-диффузионные, когда за основу берется теплоперенос;

– диффузионно-тепловые, когда за основу берется массоперенос.

Решения всех этих задач методически аналогичны. Поэтому рассмотрим их на наиболее общих примерах задач **взаимосвязанного теплопереноса в термически тонких материалах**, например, применительно к процессам сушки.

### 3.6 К решению задач взаимосвязанного теплопереноса

Разработаны методы и получены решения многочисленных линейных взаимосвязанных задач переноса (см., например, работы А.В. Лыкова, Ю.А. Михайлова, М.Д. Михайлова, Ю.Т. Глазунова). Однако, как уже говорилось, для практических расчетов они оказываются малореальными, причем не из-за математических трудностей, а из-за неизвестности, нестабильности и погрешностей многочисленных входящих в исходные модели коэффициентов и характеристик. Эти коэффициенты и характеристики в данном случае являются больше демонстрационно-показательными и не учитывают множества реальных явлений, происходящих при тепло- и массопереносе.

Поэтому в настоящем пособии излагается методология описания и расчета таких процессов с использованием температурно-влажностных зависимостей (ТВЗ), разработанная В.И. Коноваловым и его школой.

Для лучшего понимания этих методов рассмотрим вначале решения безградиентных взаимосвязанных задач в ОДУ, а затем решения задач в ДУЧП для уравнений теплопроводности и диффузии в сочетании с ТВЗ.

#### 3.6.1 Взаимосвязанный тепло- и массоперенос в термически тонких материалах

В этом разделе даются указания о двух методах решения уравнения теплового баланса. Он оказывается наиболее эффективным для материалов незначительной толщины или при малой интенсивности процесса, когда можно пренебречь перепадом температур по сечению тела и принять температуру поверхности тела  $T_n = T(R, \tau)$  примерно равной его среднемассовой температуре  $\bar{T} = \bar{T}(\tau)$ . Этот подход заключается в непосредственном использовании для расчета процесса сушки уравнения теплового баланса

$$-M_{\tau r} \frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} + M_{\tau c} \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = Q(\tau). \quad (3.6.1)$$

При комбинированном теплоподводе  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ , где например:

$$Q_1 = Q_{\text{конв}} = q_{\text{конв}} F = \alpha F [T_c - T(R, \tau)], \quad (3.6.2)$$

$$Q_2 = Q_{\text{изл}} = q_{\text{изл}} F = c_0 \varepsilon_{\text{пр}} \varphi F \{T_{\text{изл}}^4 - [T(R, \tau)]^4\}. \quad (3.6.3)$$

Замена в уравнениях (3.6.2) и (3.6.3)  $T_n$  на  $\bar{T}$  резко упрощает задачи экспериментальных исследований, так как отпадает необходимость весьма сложного измерения температурных полей. Несколько упрощается также интегрирование уравнений теплового баланса (3.6.1) – (3.6.3). Такие материалы будем называть в дальнейшем термически тонкими.

В следующем разделе приводятся примеры расчетных моделей для конкретных случаев сушки.

#### 3.6.1.1 Решение безградиентной задачи теплопереноса (3.6.1) при известной температурно-влажностной зависимости $\bar{T}(\bar{u})$

Для конвективной сушки при  $\bar{T}(R, \tau) \cong \bar{T}(\tau)$  из (3.6.1), (3.6.3) имеем

$$-M_{\tau}r \frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} + M_{\tau}c \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = \alpha F [T_c - \bar{T}(\tau)]. \quad (3.6.4)$$

Температурно-влажностная зависимость в этом случае может быть выражена непосредственно в общей форме

$$\bar{T} = \bar{T}(\bar{u}) \text{ или } \bar{T}(\tau) = \bar{T}[\bar{u}(\tau)]. \quad (3.6.5)$$

Используя зависимость (3.6.5), из уравнения (3.6.4) можно исключить функцию  $\bar{T}(\tau)$  и привести его к виду

$$-M_{\tau}r \frac{d\bar{u}}{d\tau} + M_{\tau}c \frac{d\bar{T}(\bar{u})}{d\tau} = \alpha F [T_c - \bar{T}(\bar{u})]. \quad (3.6.6)$$

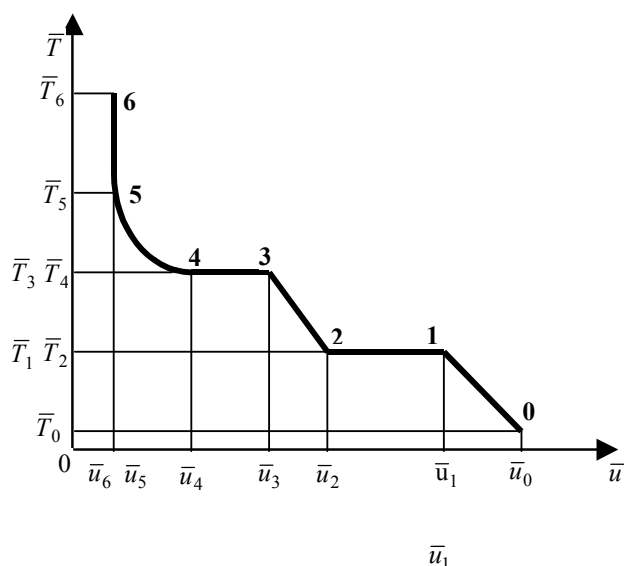
На практике удобно применять кусочно-степенную аппроксимацию зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$ , например, вида

$$\bar{T} = T_0 + b_{\tau} \bar{u}^{n_{\tau}}, \quad (3.6.7)$$

и вести расчет по зонам, число которых зависит от характера взаимосвязи между среднemasсовыми температурой и влагосодержанием материала.

Пример 6-зональной температурно-влажностной зависимости дан на рис. 3.2. Влагосодержание и температура на стыках зон будут  $\bar{u}_i, \bar{T}_i$ .

В дальнейшем для удобства индексы  $i$  опускаем и рассматриваем произвольную зону, ограниченную точками  $\bar{u}_{\text{нз}}, \bar{T}_{\text{нз}}$  в начале зоны и  $\bar{u}_{\text{кз}}, \bar{T}_{\text{кз}}$  в конце зоны.



**Рис. 3.2** Пример аппроксимации зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$

На рис. 3.2 представлены основные разновидности зон в зависимостях  $\bar{T}(\bar{u})$ . В зонах 1 и 3 зависимость  $\bar{T}(\bar{u})$  линейна, соответственно в уравнении (3.6.7) показатель степени  $n_{\tau}$ , причем  $b_{\tau} < 0$ . В зоне 5 зависимость  $\bar{T}(\bar{u})$  нелинейна. В зонах 2 и 4  $\bar{T} = \text{const}$ , то есть сушка идет при постоянной температуре материала, соответственно в уравнении (3.6.7)  $b_{\tau} = 0$ , тогда  $\bar{T} = T_0 = \bar{T}_{\text{нз}} = \bar{T}_{\text{кз}}$ . Кроме того, так как  $\frac{d\bar{T}}{d\tau} = 0$ , то в уравнениях (3.6.4), (3.6.6) второе слагаемое также равно нулю. В зоне 6, наоборот,  $\bar{u} = \text{const}$ , то есть

идет процесс «чистого» нагрева тела при постоянном (например, практически равновесном) влагосодержании материала.

Естественно, зависимости (3.6.5), (3.6.7) в этом случае не имеют смысла; а так как  $\frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0$ , то в уравнениях (3.6.4), (3.6.6) первое слагаемое равно нулю.

В уравнение (3.6.6) входят, кроме  $\bar{u}$  и  $\tau$ , еще величины  $F$ ,  $r$ ,  $c$ ,  $\alpha$  и  $T_c$ .

Рассмотрим их возможные аппроксимации.

**Масса сухого тела  $M_T$**  в процессе сушки сохраняется постоянной. Процессы, сопровождающиеся химическими превращениями со значительным изменением массы тела, в настоящем разделе не рассматриваются. Тогда

$$M_T = \rho_{\text{нас}} V; \quad (3.6.8)$$

$$\rho_{\text{нас}} = \rho_T (1 - \Pi), \quad (3.6.9)$$

где  $\rho_{\text{нас}}$  и  $\rho_T$  – «насыпная» плотность и плотность «скелета» твердого сухого тела;  $\Pi = V_{\text{св}}/V$  – пористость тела;  $V$  и  $V_{\text{св}}$  – общий объем тела и «свободный» объем пор.

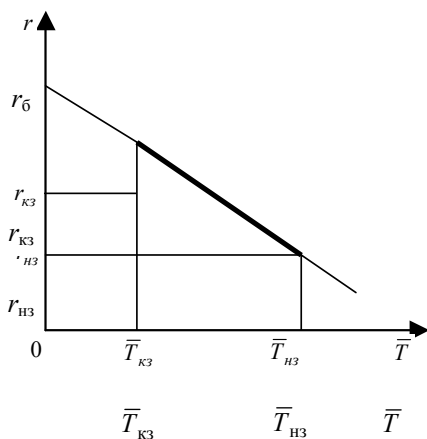
**Тепловоспринимающую поверхность тела  $F$**  обычно также можно считать постоянной. При значительной усадке или при искусственной вытяжке материала изменение поверхности в процессе сушки можно учесть кусочно-ступенчатой или кусочно-линейной функцией влагосодержания тела по зонам.

Для «бесконечной» пластины или «бесконечного» цилиндра массу, объем и поверхность принимают для одного погонного метра.

**Теплоту испарения  $r$**  в пределах зоны приблизительно можно аппроксимировать линейной функцией температуры

$$r = r_0 + b_r \bar{T}. \quad (3.6.10)$$

Для ее получения по паровым таблицам находят два значения теплоты парообразования при температурах, равных температурам материала



**Рис. 3.3** Схема аппроксимации  $r(\bar{T})$

в начале и в конце зоны  $r_{\text{нз}}(\bar{T}_{\text{нз}})$  и  $r_{\text{кз}}(\bar{T}_{\text{кз}})$ . В соответствии с принятой схемой (рис. 3.3) получаем:

$$b_r = \frac{r_{\text{кз}} - r_{\text{нз}}}{\bar{T}_{\text{кз}} - \bar{T}_{\text{нз}}}, \quad (3.6.11)$$

$$r_0 = r_{\text{нз}} - b_r \bar{T}_{\text{нз}}. \quad (3.6.12)$$

Затем температуру материала в уравнении (3.6.10) выражают функцией влагосодержания  $\bar{T}(\bar{u})$  в соответствии с (3.6.5), (3.6.7).

Иногда в области малых влагосодержаний существенная часть влаги прочно связана с материалом. В этих случаях рекомендуют учитывать дополнительный расход тепла на разрушение этой связи. Это можно сделать, вводя соответствующие добавки к теплоте парообразования.

**Теплоемкость влажного материала** в расчете на 1 кг сухого материала  $c$  зависит от теплоемкостей жидкости  $c_{ж}$  и твердого «скелета»  $c_{т}$  как практически аддитивное свойство

$$c = c_{т} + c_{ж}\bar{u}. \quad (3.6.13)$$

**Коэффициент теплоотдачи**  $\alpha$  можно выразить степенной функцией влагосодержания. Используем ее в виде

$$\alpha = \alpha_0 + b_{\alpha}\bar{u}^{n_{\alpha}}. \quad (3.6.14)$$

В частных случаях может быть, например,  $n_{\alpha} = 1$ , и зависимость будет линейной; или  $b_{\alpha} = 0$ , и тогда коэффициент теплоотдачи является в данной зоне постоянной величиной  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ .

**Температуру среды** практически можно считать по зонам линейной функцией влагосодержания материала

$$T_c = T_{сб} + b_{тс}\bar{u}. \quad (3.6.15)$$

Для ее нахождения, аналогично аппроксимации  $r(\bar{T})$ , используем две точки: известную температуру среды в начале зоны  $T_{снз}$  и температуру среды в конце зоны  $T_{скз}$ , которую можно предварительно оценить из расчета статики процесса сушки с учетом взаимного направления движения потоков высушиваемого материала и среды-теплоносителя (рис. 3.4).

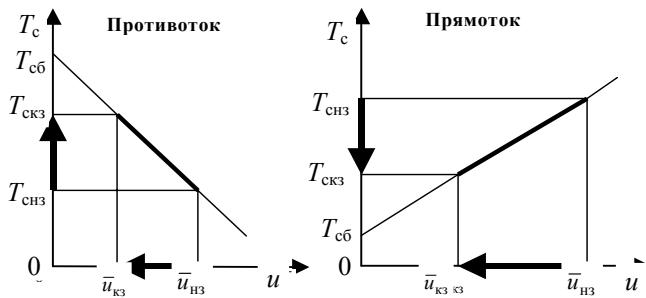


Рис. 3.4 Схема аппроксимации  $T_c(\bar{u})$

Согласно принятой схеме получаем:

$$b_{тс} = \frac{T_{снз} - T_{скз}}{\bar{u}_{нз} - \bar{u}_{кз}}; \quad (3.6.16)$$

$$T_{сб} = T_{снз} - b_{тс}\bar{u}_{нз}. \quad (3.6.17)$$

Таким образом, все переменные величины, входящие в уравнение (3.6.7) выражены функциями влагосодержания материала. При этом переменные  $\bar{u}$  и  $\tau$  разделяются, благодаря чему удастся получить

**решение в общем виде, выражаемое всего одной квадратурой**

$$\tau = \int_{\bar{u}_{нз}}^{\bar{u}} \frac{\{-M_{т}r[\bar{T}(\bar{u})] + M_{т}c(\bar{u})\frac{\alpha\bar{T}(\bar{u})}{\alpha\bar{u}}\}d\bar{u}}{\alpha(\bar{u})F[T_c(\bar{u}) - \bar{T}(\bar{u})]}. \quad (3.6.18)$$

Используя вышеизложенные способы аппроксимации  $\bar{T}$ ,  $r$ ,  $c$ ,  $\alpha$  и  $T_c$ , запишем выражение интеграла (3.6.18) в такой форме

$$\tau = \frac{M_T}{F} \int_{\bar{u}_{\text{нз}}}^{\bar{u}} \frac{\{-[r_0 + b_T(T_0 + b_T \bar{u}^{n_T})] + (c_T + c_{\text{ж}} \bar{u}) b_T n_T \bar{u}^{n_T-1}\} d\bar{u}}{(\alpha_0 + b_\alpha \bar{u}^{n_\alpha}) [(T_{\text{сб}} + b_{\text{тс}} \bar{u}) - (T_0 + b_T \bar{u}^{n_T})]}. \quad (3.6.19)$$

Вычисление интеграла может быть проделано даже «вручную», например, графоаналитически. Однако это слишком трудоемко. Рекомендуется вести расчет на ПК.

Во многих частных случаях решения (3.6.19) можно получить в элементарных функциях.

Если  $\bar{T}$ ,  $c$  и  $T_c$  – **кусочно-линейные функции влагосодержания**, а остальные характеристики кусочно-постоянны, то есть в выражении (3.6.19)  $n_T = 1$ ,  $b_\alpha = 0$ ,  $b_r = 0$ , то решение будет таким

$$\tau = -\frac{c_2}{c_3} (\bar{u}_{\text{нз}} - \bar{u}) + \left( \frac{c_2 c_4}{c_3^2} - \frac{c_1 + c_5}{c_3} \right) \ln \frac{c_3 \bar{u}_{\text{нз}} + c_4}{c_3 \bar{u} + c_4}. \quad (3.6.20)$$

Здесь введены обозначения:

$$C_4 = -M_T r; \quad (3.6.21)$$

$$C_2 = -M_T c_{\text{ж}} b_T; \quad (3.6.22)$$

$$C_3 = \alpha F (b_{\text{тс}} - b_T); \quad (3.6.23)$$

$$C_4 = \alpha F (T_{\text{сб}} - T_0); \quad (3.6.24)$$

$$C_5 = M_T c_1 b_T. \quad (3.6.25)$$

Если  $\bar{T}$  **дробно-линейная функция**

$$\bar{T} = T_0 + \frac{b_T}{\bar{u}}, \quad (3.6.26)$$

а остальные величины выражаются так же, как в предыдущем случае, то решение при тех же обозначениях (3.6.21) – (3.6.25) имеет вид:

$$\tau = \frac{c_5}{c_4} \left( \frac{1}{\bar{u}} - \frac{1}{\bar{u}_{\text{нз}}} \right) - \frac{c_4}{c_3} \ln \frac{c_3 \bar{u}_{\text{нз}} + c_4}{c_3 \bar{u} + c_4} + \left( \frac{c_2}{c_4} - \frac{c_3 c_5}{c_4^2} \right) \ln \frac{(c_3 \bar{u} - c_4) \bar{u}_{\text{нз}}}{(c_3 \bar{u}_{\text{нз}} - c_4) \bar{u}}. \quad (3.6.27)$$

В простейшем случае  $\bar{T}(\bar{u})$  является **кусочно-линейной функцией**

$$\tau = \frac{M_T}{\alpha F} (-r + c b_T) \int_{\bar{u}_{\text{нз}}}^{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{[T_c - (T_0 + b_T \bar{u})]}.$$

Отсюда, учитывая, что  $T_0 + b_T \bar{u} = \bar{T}$ , будем иметь

$$\tau = \frac{M_T}{\alpha F} \left( c - \frac{r}{b_T} \right) \ln \frac{T_c - \bar{T}_{\text{нз}}}{T_c - \bar{T}}. \quad (3.6.28)$$

В частном случае, когда при этом  $T_c = T_0$ , получаем обычное

$$\tau = \frac{M_T}{\alpha F} \left( c - \frac{r}{b_T} \right) \ln \frac{\bar{u}_{\text{нз}}}{\bar{u}}. \quad (3.6.29)$$

### 3.6.1.2 Решение безградиентной задачи тепломассопереноса (3.6.1) при известной зависимости для скорости сушки $N(\bar{u})$

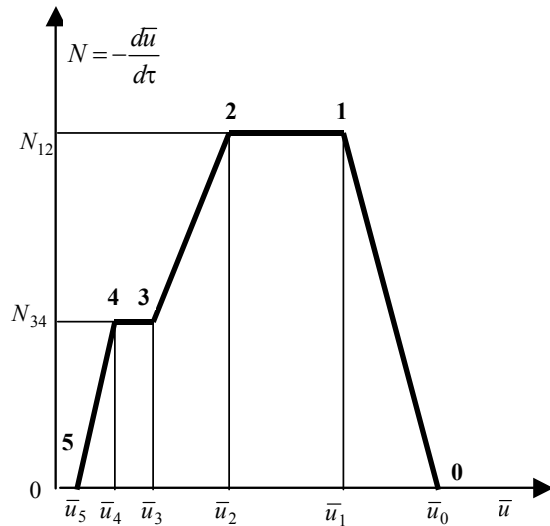
Аппроксимация скорости сушки какой-либо зависимостью от текущего влагосодержания является традиционным эмпирическим приемом.

Зная  $N(\bar{u}) = -\frac{d\bar{u}}{d\tau}(\bar{u})$ , легко получить время сушки

$$\tau = - \int_{\bar{u}_{\text{нз}}}^{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{N(\bar{u})} = \tau(\bar{u}). \quad (3.6.30)$$

Расчет при этом также обычно ведется по зонам или периодам. Пример зависимости  $N(\bar{u})$  приведен на рис. 3.5. Здесь использована простейшая кусочно-линейная аппроксимация, когда в каждой из зон или  $N = \text{const}$ , или

$$N(\bar{u}) = - \frac{d\bar{u}}{d\tau} = K(\bar{u} - u_6). \quad (3.6.31)$$



**Рис. 3.5** Пример аппроксимации зависимости  $N(\bar{u})$

Здесь  $K$  – коэффициент сушки;  $u_6$  – некоторое «базовое» значение влагосодержания, отсекаемое отрезком  $N(\bar{u})$  или его продолжением на оси абсцисс. На рис. 3.5 в зонах 2 и 4 скорость сушки постоянна  $N = N_{\text{нз}} = N_{\text{кз}} = \text{const}$ . В зонах 1, 3 и 5  $N$  изменяется, причем в уравнении (3.6.31):

$$K = \frac{N_{\text{нз}} - N_{\text{кз}}}{\bar{u}_{\text{нз}} - \bar{u}_{\text{кз}}}, \quad (3.6.32)$$

$$u_6 = \bar{u}_{\text{нз}} - \frac{N_{\text{нз}}}{K} = \bar{u}_{\text{кз}} - \frac{N_{\text{кз}}}{K}. \quad (3.6.33)$$

При этом в зоне 1 скорость сушки возрастает и  $K < 0$ , а в зонах 3 и 5 – падает и  $K > 0$ . Интегрируя уравнение (3.6.31), получаем время сушки в обычном виде

$$\tau = \frac{1}{K} \ln \frac{\bar{u}_{\text{нз}} - u_6}{\bar{u} - u_6}. \quad (3.6.34)$$

Отсюда уравнение кривой сушки записывается в виде

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}_6 + b_u \exp(-K\tau), \quad (3.6.35)$$

где предэкспоненциальный множитель

$$b_u = \bar{u}_{\text{нз}} - u_6. \quad (3.6.36)$$

Дифференцируя выражение (3.6.35), получим зависимость скорости сушки от времени

$$N(\tau) = \frac{d\bar{u}(\tau)}{d\tau} = b_u K \exp(-K\tau). \quad (3.6.37)$$



Зная зависимость  $N(\bar{u})$ , можно получить  $\bar{u}(\tau)$  и  $N(\tau)$  и для других способов аппроксимации скорости сушки.

Теперь, когда известна зависимость  $N(\tau)$ , из уравнения теплового баланса (3.6.4) получим

$$M_T r N(\tau) + M_T c \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = \alpha F [T_c - \bar{T}(\tau)]. \quad (3.6.38)$$

Входящие в уравнение (3.6.38) переменные величины выражаем функциями температуры или влажосодержания аналогично вышеизложенному.

В последнем случае, используя зависимость (3.6.35) для  $\bar{u}(\tau)$ , преобразуем переменные в функции времени.

Для аппроксимации  $r(\bar{T})$  непосредственно используются зависимости (3.6.10) – (3.6.12).

Если температуры  $\bar{T}_{\text{нз}}$  или  $\bar{T}_{\text{кз}}$  в начале расчета неизвестны, то можно их взять ориентировочно.

Теплоемкость, используя выражения (3.6.13) и (3.6.35), получим в виде

$$c = c_0 + b_c \exp(-K\tau), \quad (3.6.39)$$

где

$$c_0 = c_T + c_{\text{ж}} u_0, \quad (3.6.40)$$

$$b_c = c_{\text{ж}} b_u. \quad (3.6.41)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  в данном случае целесообразнее выразить степенной зависимостью, например:

$$\alpha = \alpha_0 + b_\alpha \left( \frac{\bar{u} - u_0}{\bar{u}_{\text{нз}} - u_0} \right)^{n_\alpha}, \quad (3.6.42)$$

откуда с учетом соотношения (3.6.34) получаем

$$\alpha = \alpha_0 + b_\alpha \exp(-n_\alpha K\tau). \quad (3.6.43)$$

Температуру среды сначала выразим согласно (3.6.15) в виде

$$T_c = T_{\text{сбо}} + b_{\text{тсо}} \bar{u}, \quad (3.6.15, a)$$

где

$$b_{\text{тсо}} = \frac{T_{\text{снз}} - T_{\text{скз}}}{\bar{u}_{\text{нз}} - \bar{u}_{\text{кз}}}, \quad (3.6.16, a)$$

$$T_{\text{сбо}} = T_{\text{снз}} - b_{\text{тсо}} \bar{u}_{\text{нз}}. \quad (3.6.17, a)$$

Подставив в (3.6.15a) выражение (3.6.35), получим

$$T_c = T_{\text{сб}} + b_{\text{тс}} \exp(-K\tau), \quad (3.6.44)$$

где

$$T_{\text{сб}} = T_{\text{тсо}} + b_{\text{тсо}} u_0, \quad (3.6.45)$$

$$b_{\text{тс}} = b_{\text{тсо}} b_u. \quad (3.6.46)$$

Заменив переменные величины в уравнении (3.6.38) функциями от  $\bar{T}$  или  $\tau$  и разрешив его относительно производной, получим уравнение скорости нагрева тела в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, решенного относительно производной

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} = \left\{ \frac{\alpha(\tau)F + M_T b_r N(\tau)}{M_T c(\tau)} \right\} \bar{T} + \left\{ \frac{\alpha(\tau)F T_c(\tau) - M_T r_0 N(\tau)}{M_T c(\tau)} \right\}. \quad (3.6.47)$$

Это линейное уравнение, решение которого выражается **двумя квадратурами**

$$\bar{T} = e^{-\int_0^{\bar{T}} \rho(\tau) d\tau} \left[ \bar{T}_{\text{нз}} + \int_0^{\bar{T}} q(\tau) e^{\int_0^{\tau} \rho(\tau) d\tau} d\tau \right]. \quad (3.6.48)$$

Здесь  $\rho(\tau)$  – первый член в фигурных скобках, а  $q(\tau)$  – второй член в фигурных скобках уравнения (3.6.47).

Вычисление интегралов в (3.6.48) вручную, например, графоаналитическим методом, также возможно, но слишком громоздко. Рекомендуется использовать калькулятор или компьютер. При этом решается непосредственно уравнение (3.6.47), которое после подстановки полученных аппроксимационных соотношений принимает вид:

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} = \frac{1}{M_{\tau} [c_6 + b_c \exp(-K\tau)]} \{ [\alpha_6 + b_a \exp(-n_a K\tau)] F \{ [T_{c6} + b_{\tau c} \exp(-K\tau)] - \bar{T} \} - M_{\tau} (r_6 + b_1 \bar{T}) b_u K \exp(-K\tau) \}. \quad (3.6.49)$$

В ряде частных случаев решение (3.6.49) может быть получено **в элементарных функциях**.

Например, если **скорость сушки изменяется кусочно-линейно** (3.6.31), а все остальные характеристики кусочно-постоянны, то изменение температуры по зонам будет описываться зависимостью

$$\bar{T} = T_c - \frac{c_6}{c_7 - K} e^{-k\tau} - (T_c - \bar{T}_{\text{нз}} - \frac{c_6}{c_7 - K}) e^{-c_7\tau}, \quad (3.6.50)$$

в которой введены обозначения:

$$c_6 = \frac{r b_u K}{c}; \quad (3.6.51)$$

$$c_7 = \frac{\alpha F}{c M_{\tau}}. \quad (3.6.52)$$

Для приближенного расчета зоны нагрева материала можно принять скорость сушки примерно постоянной  $N_{\text{нагр}} = \text{const}$ . Тогда время нагрева от  $\bar{T}_{\text{нз}}$  до  $\bar{T}$  при постоянных теплофизических характеристиках будет

$$\tau = \frac{c M_{\tau}}{\alpha F} \ln \frac{\alpha F (T_c - \bar{T}_{\text{нз}}) - M_{\tau} r N_{\text{нагр}}}{\alpha F (T_c - \bar{T}) - M_{\tau} r N_{\text{нагр}}}. \quad (3.6.53)$$

В решениях (3.6.50) – (3.6.53), как и ранее, для  $\alpha$ ,  $r$ ,  $c$ ,  $T_c$  принимаются среднеарифметические значения от значений в начале и в конце зоны.

### 3.6.2 Решения дифференциальных уравнений теплопроводности и диффузии в сочетании с ТВЗ

Как уже говорилось, главные трудности описания и моделирования взаимосвязанных процессов переноса состоят не столько в математических, сколько в физико-химических проблемах анализа механизма и кинетики тепло- и массопереноса. При этом основной проблемой для построения методов расчета взаимосвязанных процессов диффузии и теплопроводности (например, сушки и нагрева) остается учет взаимовлияния тепло-, влаго- и баропереноса.

В настоящее время наибольшее распространение как в России, так и за рубежом для теоретического описания таких процессов имеет система дифференциальных уравнений А.В. Лыкова, учитывающая «перекрестные эффекты» на базе линейной термодинамики необратимых процессов. Предложены также еще более общие описания, а в последние годы другие фундаментальные подходы, в том числе, в интенсивно развивающейся нелинейной термодинамике необратимых процессов. Эти прогнозируемые физической теорией взаимосвязи и особенности нужно иметь в виду, однако непосредственное применение сложных систем взаимосвязанных дифференциальных уравнений с многочисленными необходимыми коэффициентами для конкретных рассматриваемых процессов по вышеуказанным причинам является затруднительным.

Поэтому такие задачи целесообразно ставить в «развязанном» виде. Тогда в вышеприведенной исходной системе уравнений остаются хорошо изученные «обычные» дифференциальные уравнения теплопроводности и диффузии, а взаимосвязи процессов переноса, стоки тепла и влаги и другие существенные особенности учитываются заданием:

- температурно-влажностных зависимостей;
- эквивалентных граничных условий;
- эффективных кинетических коэффициентов.

Таким образом, ТВЗ становятся своеобразной дополнительной характеристикой, гибко отрабатывающей разнообразные особенности механизма и кинетики конкретных взаимосвязанных процессов.

Решение такой системы уравнений теплопроводности и диффузии в сочетании с ТВЗ выполняется итерациями с корректировкой в процессе счета наименее надежных характеристик так, чтобы расчетные температуры и влагосодержания материала в процессе сушки с достаточной точностью соответствовали установленной температурно-влажностной зависимости.

При этом ТВЗ может выбираться:

- локальной для лимитирующего сечения  $T_{\text{лок}}(u_{\text{лок}})$  (чаще всего для поверхности испарения);
- среднemasсовой  $T_{\text{ср}}(u_{\text{ср}})$ ;
- или даже приближенно в виде  $T_{\text{лок}}(u_{\text{ср}})$ .

**Эквивалентизация граничных условий и эффективные характеристики теплопереноса.**

Типичными для таких процессов являются ГУ-3 как для задач теплопроводности, так и для задач диффузии.

Описание и расчет таких процессов производится в линейной постановке, как это описано выше для многослойных задач, по периодам и зонам, зависящим от условий конкретного процесса, а расчет – по достаточно малым временным интервалам  $\Delta t$  в пределах зон.

Соответственно нелинейные потоки и переменные источниковые члены учитываются приведением ГУ-3 к **эквивалентному** кусочно-линейному виду, а характеристики тепло- и массопереноса, входящие как в ГУ-3, так и в основные уравнения переноса, приводятся к кусочно-ступенчатому виду и являются «**эффективными**», комплексно учитывающими вклад всех существенных для данной расчетной зоны явлений.

При этом **эквивалентные ГУ-3** получают в традиционной форме:

- для **теплопереноса** как в первом, так и во втором периоде сушки

$$\lambda_3 \frac{\partial T(l, \tau)}{\partial \tau} = \alpha_{\text{эКВ}} [T_{\text{ср}} - T(l, \tau)]; \quad (3.6.54)$$

– для **массопереноса**, соответственно, в первом периоде сушки (при межфазном равновесии на поверхности тела) и во втором периоде сушки (когда принимаются условные коэффициенты массоотдачи  $\beta^*$ , отнесенные к перепаду фактических и квазиравновесных концентраций влаги на поверхности материала):

$$D_3 \frac{\partial C(l, \tau)}{\partial x} = \beta_{\text{исп}} [C_{\text{нас}}(T(l, \tau)) - C_c]; \quad (3.6.55)$$

$$D_3 \frac{\partial C(l, \tau)}{\partial x} = \beta^* [C(l, \tau) - C_{\text{кВ}}^*(l, \tau)]. \quad (3.6.56)$$

**Стоки тепла** на испарение учитываются в зависимости от механизма испарения влаги, оцениваемого критерием фазового превращения  $\varepsilon$ .

При чисто **поверхностном** испарении ( $\varepsilon = 0$ ) в первом периоде сток учитывается в ГУ-3 введением в (3.6.54) коэффициента массоотдачи  $\beta_{\text{исп}}$  по соотношениям:

$$\alpha_{\text{эКВ}} = \alpha_{\text{эф}} \left( 1 + \frac{\beta_{\text{исп}} r b_n}{\alpha_{\text{эф}}} \right); \quad (3.6.57)$$

$$T_{сз} = \frac{T_c + \frac{q_{изл}}{\alpha_{эф}} - \frac{\beta_{исп} r a_n}{\alpha_{эф}}}{1 + \frac{\beta_{исп} r a_n}{\alpha_{эф}}}. \quad (3.6.58)$$

Здесь  $\alpha_{эф} = \alpha_{конв} + \alpha_{изл}$  учитывает теплоподвод конвекцией и излучением;  $a_n, b_n$  – коэффициенты линеаризуемого по интервалам  $\Delta\tau$  уравнения для концентрации насыщенного пара у поверхности  $C_{нас}(T) = a_n + b_n T$ ;  $C_{нас} = C_{нас}(P_{нас}(T(l, \tau)))$ , где  $P_{нас}(T)$  аппроксимируется уравнением Антуана.

Чисто **объемный** сток тепла ( $\varepsilon = 1$ ) во 2-м периоде сушки войдет в уравнение теплопроводности в виде эквивалентной теплоемкости

$$c_{эКВ} = c_T + c_{ж} \bar{u} - r \frac{d\bar{u}}{d\tau} b_T, \quad (3.6.59)$$

где  $b_T$  – угловой коэффициент линеаризованной ТВЗ.

Аналогично вводятся стоки на **кондуктивное** испарение на стенке, а также при распределенном **поверхностно-объемном** испарении, например, при кусочно-ступенчатом задании  $\varepsilon = 0,25; 0,5; 0,75$ .

Для учета **излучения** в ГУ-3 рекомендуется уточненная методика расчета эффективного коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_{эф} = \alpha_{конв} + \alpha_{изл} \quad (3.6.60)$$

по соотношениям:

$$q = \alpha_{эф} (T_m - T(R, \tau)); \quad (3.6.61)$$

$$\alpha_{изл} = C_0 \Psi_{прив} (T_{изл}^3 + T_{изл}^2 T + T_{изл} T^2 + T^3). \quad (3.6.62)$$

Здесь предельная температура материала  $T_m$  находится итерациями из очевидного баланса  $q_{конв} = q_{изл}$  при конечном термическом равновесии

$$\alpha_{конв} (T_c - T_m) + C_0 \Psi_{прив} (T_{изл}^4 - T_m^4) = 0. \quad (3.6.63)$$

Аналогично могут учитываться **теплота концентрирования** (дегидратации)  $q_{дг}$ , **кристаллизации**  $r_{кр}$  и теплота испарения **связанной влаги**  $r_{связ}$ . Их локализация и ввод в ГУ-3 или в объемные стоки соответствуют месту испарения влаги и образования кристаллов.

Предложены также выражения для эффективных коэффициентов теплоемкости  $c_{э}$ , теплопроводности  $\lambda_{э}$ , плотности  $\rho_{э}$  с учетом порозности и влагонасыщения материалов, а также для грубой оценки коэффициентов диффузии  $D_{э}$  и массоотдачи  $\beta^*$ .

**Аналитические решения задач теплопроводности и диффузии** используются, как они представлены выше, в виде решений многослойных линейных задач теплопроводности (диффузии), с эквивалентными ГУ-3, с расчетом на малых временных интервалах, с кусочно-ступенчатой аппроксимацией тепломассопереносных характеристик и толщин слоев, с функционально заданными начальными условиями по этим интервалам.

Решение такой системы уравнений теплопроводности и диффузии в сочетании с ТВЗ выполняется итерациями, с достаточно малым шагом, с корректировкой в процессе счета на каждом шаге наименее надежных характеристик так, чтобы расчетные температуры и влагосодержания материала в процессе сушки с достаточной точностью соответствовали установленной температурно-влажностной зависимости.

Такие расчеты возможны только при их компьютерной реализации.

### 3.7 К решению нелинейных задач теплопроводности и диффузии

**3.7.1** К настоящему времени разработаны и продолжают разрабатываться многочисленные **точные и приближенные аналитические** методы решения нелинейных задач переноса, например: интервальные методы, асимптотические методы, методы группового анализа, автомодельные решения и другие (см., например, книги Г.А. Аксельруда, А.Д. Полянина).

Универсальными для них, как и для всех задач, не поддающихся аналитическим решениям, являются, естественно, **численные** методы, которые также весьма многочисленны. Однако эти методы сильно формализованы и нуждаются в обосновании единственности, сходимости и устойчивости, а иногда возможны случаи патологии. При частом отсутствии указанных обоснований **проверку численных решений производят на тестовых решениях, полученных аналитически**, или даже по экспериментальным данным.

Таким образом, «первичными» и «базовыми» все-таки остаются аналитические методы. Поэтому в данном пособии численные методы решения ДУЧП не рассматриваются.

**3.7.2 Приближенные аналитические** решения нелинейных задач, возникающих из-за переменности свойств и кинетических характеристик, уже рассматривались в предыдущем разделе, поскольку задачи взаимосвязанного переноса практически всегда нелинейны.

Основой их являются вышеупомянутые «интервальные» методы, позволяющие использовать аналитические решения, полученные для линейных задач теплопроводности и диффузии, в случаях нелинейностей, связанных с изменением тепломассопереносных свойств, внешних условий и геометрии тела во времени.

Суть этих «интервальных» методов состоит в том, что процесс по времени разбивается на малые временные интервалы  $\Delta t$ . Длительность каждого интервала определяется величиной изменения тепломассопереносных свойств, внешних условий и геометрии тела в зависимости от температуры или концентрации.

Для решения задачи выделяют так называемые первый интервал, предыдущий и последующий интервалы. Для каждого интервала, изменяющиеся коэффициенты и характеристики принимаются средними, кусочно-постоянными, и рассчитываются по аппроксимационным зависимостям. Таким образом, задача для каждого интервала считается линейной.

Для первого интервала задача решается, исходя из поставленных начальных условий. В результате, в момент времени  $\Delta t_{i+1}$  получаем температурное поле определенного вида.

Для последующего интервала в качестве начальных условий принимается распределение температуры на предыдущем интервале в момент времени  $\Delta t_i$  (то есть в конце предыдущего интервала). Функция, описывающая температурное поле в конце предыдущего интервала, есть ряд Фурье, являющийся решением задачи в момент времени  $\Delta t_i$  для предыдущего интервала. Это позволяет учесть данное температурное поле в последующем интервале в аналитическом виде.

Соответственно, для того чтобы получить аналитическое решение для «интервального» метода для первого, последующего и предыдущего интервалов в аналитическом виде, необходимо иметь решение линейной задачи в аналитическом виде.

Приведем для примера аналитическое решение для «интервального» метода для нелинейной задачи теплопроводности (диффузии) в однослойной одномерной бесконечной пластине толщиной  $l$  с нулевыми ГУ-1 и безградиентными начальными условиями.

*Постановка задачи:*

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 P(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad a = f(P(x, \tau)) \neq \text{const}, \quad (3.7.1)$$

$$P(0, \tau) = 0, \quad (3.7.2)$$

$$P(l, \tau) = 0, \quad (3.7.3)$$

$$P(x, 0) = \varphi(x) = P_0 = \text{const}. \quad (3.7.4)$$

*Решение задачи (3.7.1) – (3.7.4), полученное с помощью метода Фурье для  $a = \text{const}$ , имеет вид:*

$$P(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a \tau), \quad (3.7.5)$$

где

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2 \dots \infty, \quad (3.7.6)$$

$$A_n = -\frac{2P_0}{l\mu_n}(\cos(\mu_n l) - 1). \quad (3.7.7)$$

В случае  $a = f(P(x, \tau))$  необходимо, согласно интервальному методу, получить решения по интервалам. При этом, как подчеркивалось выше, в каждом интервале будут свои теплофизические свойства и начальное распределение температуры, взятое как конечное распределение температуры из предыдущего интервала:

1) для **первого интервала**

$$P_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a \tau), \quad (3.7.8)$$

где значения  $A_n$ ,  $\mu_n$  определяются из (3.7.6), (3.7.7);

2) для **последующих интервалов** решение записывается для начала (индекс «bz») и конца (индекс «ez») интервала

$$P_{bz}(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\mu_k x) \exp(-\mu_k^2 a_{bz} \tau), \quad (3.7.9)$$

где  $A_k$ ,  $\mu_k$ ,  $a_{bz}$  – в начале интервала известны. Они рассчитываются как переменные в конце предыдущего интервала и принимаются для данного интервала как константы;

$$P_{ez}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a_{ez} \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(\mu_n x) dx \right] \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a_{ez} \tau). \quad (3.7.10)$$

В решении для конца интервала в качестве начального распределения температуры  $\varphi(x)$  необходимо взять распределение температуры в конце предыдущего интервала, то есть  $\varphi(x) = P_{bz}(x, \tau)$ :

$$P_{ez}(x, \tau) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\mu_k^2 a_{bz} \tau_{bz}) \left[ \frac{\sin(l(\mu_k - \mu_n))}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin(l(\mu_k + \mu_n))}{\mu_k + \mu_n} \right] \right) \times \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a_{ez} \tau), \quad (3.7.11)$$

или фактически

$$P_{ez}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x) \exp(-\mu_n^2 a_{ez} \tau), \quad (3.7.12)$$

где

$$A_n = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\mu_k^2 a_{bz} \tau_{bz}) \left[ \frac{\sin(l(\mu_k - \mu_n))}{\mu_k - \mu_n} - \frac{\sin(l(\mu_k + \mu_n))}{\mu_k + \mu_n} \right]. \quad (3.7.13)$$

Здесь  $\tau_{ez}$  – продолжительность текущего интервала;  $\tau_{bz}$  – продолжительность предыдущего интервала;  $a_{ez}$  – температуропроводность на текущем интервале;  $a_{bz}$  – температуропроводность на предыдущем интервале.

Таким образом, уравнения (3.7.8) – (3.7.13) представляют собой полное **приближенное аналитическое решение** рассматриваемой задачи с изменяющимися теплофизическими свойствами. При этом решение для каждого последующего интервала представляется в аналитическом виде **без нагромождения** решений от предыдущих интервалов.

**Корректность** такого метода решения должна обосновываться дополнительно и проверяться в процессе практического счета.

## 4 МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

### 4.1 Постановка задач теплопроводности (диффузии) и аналитические решения их дифференци-

**альных уравнений в частных производных**

**4.1.1** В предлагаемой самостоятельной работе **требуется** на основании исходных данных записать математическую постановку задачи и найти ее аналитическое решение с помощью метода разделения переменных.

В табл. 4.1 и 4.2 для формулирования задачи дана исходная информация к заданию. В табл. 4.1: геометрия тела, количество и материал слоев, из которых состоит тело, температуры окружающей среды  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$ , условия теплообмена на поверхностях тела, начальное распределение температуры в теле.

В табл. 4.2 даны теплофизические свойства материалов.

Таблица 4.1

Номер варианта	Геометрия тела	Материал слоев	Размеры тела	$T_{c1}$	$T_{c2}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	Начальные условия
1	пластина	Алюминий	0,5	10	10 0	–	–	$5x^2+10$
2	пластина	Фторопласт	0,3	20 0	20	20	–	75
3	пластина	Медь	0,1	30	70	–	35	$300 - 2x^3$
4	шар	Латунь	0,7	12 0	–	–	–	25
5	шар	Железо	0,4	20	–	15	–	200
6	шар	Алюминий	0,2	75	–	20 0	–	$10r^2$
7	пластина	Алюминий/ фторопласт/железо	0,1/0,7/0 ,4	10 0	15 0	–	–	10/50/35
8	пластина	Фторопласт/ латунь/медь	0,5/0,3/0 ,9	20	10	–	–	200/150/30
9	пластина	Железо/ алюминий/медь	0,1/0,7/0 ,4	10 0	15 0	30	–	10/50/35
10	пластина	Фторопласт/ латунь/алюминий	0,5/0,3/0 ,8	10	25	–	15	200/150/30
11	пластина	Алюминий/ медь/железо	0,1/0,7/0 ,2	10 0	15 0	30	50	10/50/35
12	пластина	Фторопласт/ латунь/алюминий	0,5/0,3/0 ,2	15	35	10	70	200/150/30
13	шар	Алюминий/ фторопласт	0,2/0,8	10 0	–	–	–	10/20
14	шар	Медь/железо	0,2/0,8	40	–	25	–	100/50
15	шар	Латунь/фторопласт	0,5/0,4	25 0	–	15	–	120/40

Таблица 4.2

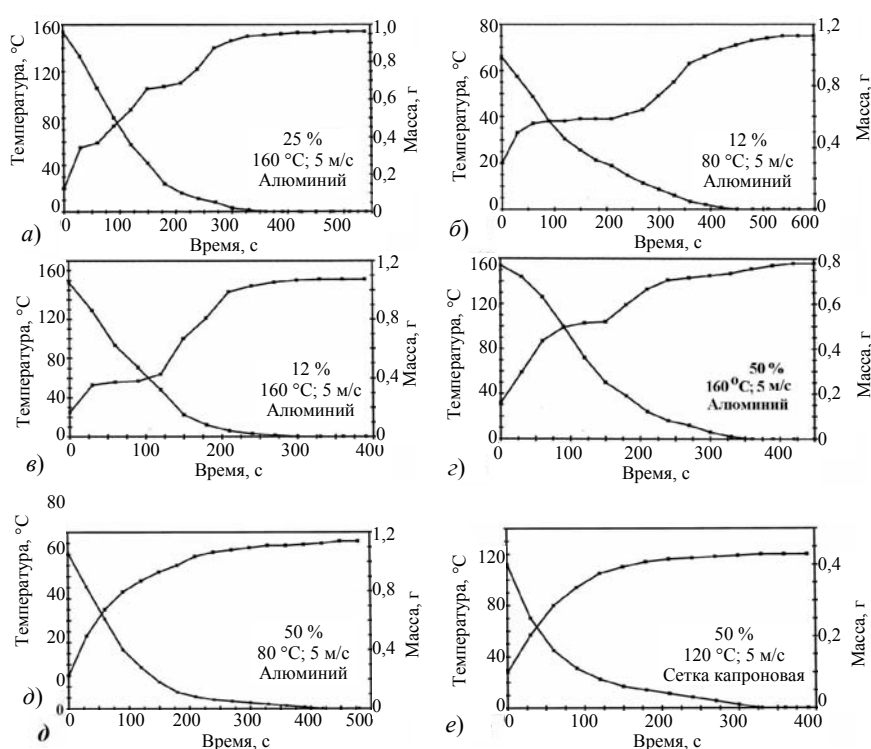
Материал	Плотность	Удельная тепло-	Теплопровод-
----------	-----------	-----------------	--------------

	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	емкость $c$ , Дж/(кг·К)	ность $\lambda$ , Вт/(м·К)
Алюминий	2700	905	210
Железо	7870	450	74
Латунь	8400	400	105
Фторопласт	2215	1050	0,25
Медь	8960	385	395

### Пример формулировки задачи для варианта № 1

Поставить краевую задачу теплопроводности и найти ее аналитическое решение для однослойной одномерной бесконечной пластины толщиной  $l = 0,5$  м. Материал пластины – алюминий. Граничные условия: температурное поле – на внешних поверхностях пластины поддерживается температура 10 и 100 °С.

**4.1.2** Классификационный комплект из 6 модельных типов экспериментальных температурных и влажностных кривых сушки дисперсий диспергатора НФ на различных подложках представлен в качестве примера на рис. 4.1.



**Рис. 4.1** Классификационный комплект из 6 типов экспериментальных температурных и влажностных кривых сушки дисперсий диспергатора НФ на различных подложках

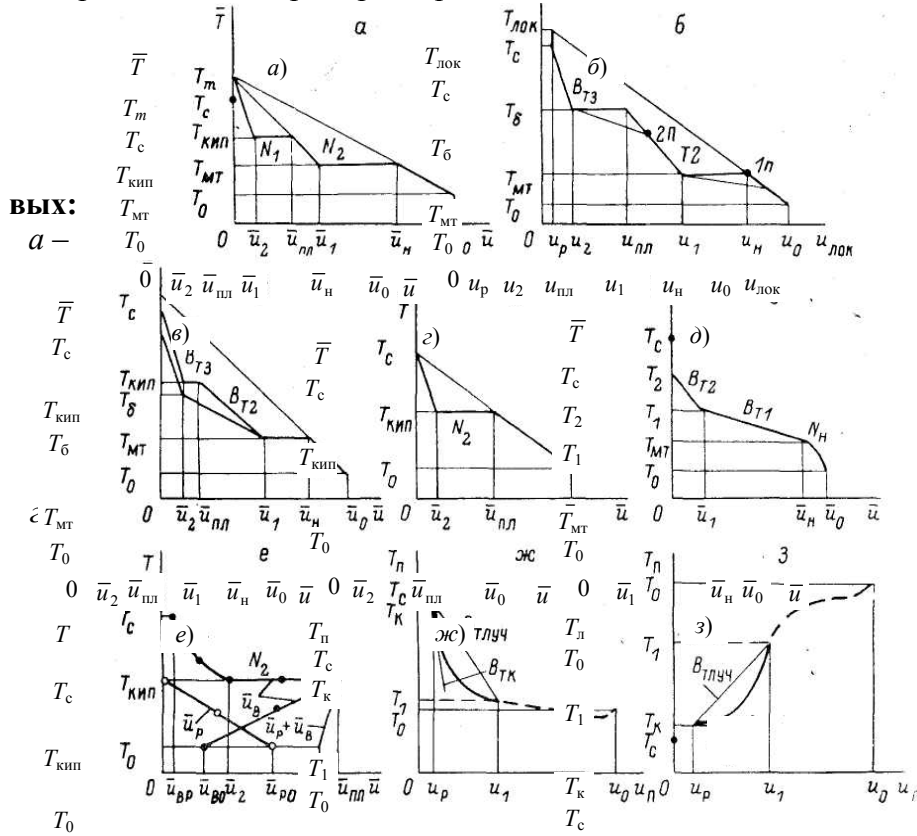
Это экспериментальные кинетические кривые, полученные для одно- и двухслойных задач переноса типичных химических продуктов.

Получаемые решения должны отрабатывать подобные экспериментальные данные во всем исследуемом диапазоне продуктов и условий.

### 4.2 Постановка и решения безградиентных задач теплопроводности и диффузии



**4.2.1 Модели базовых температурно-влажностных зависимостей** для ряда конкретных продуктов приведены для примера на рис. 4.2.



**Рис. 4.2 Модели базовых температурно-влажностных кри-**

конвективная и конвективно-радиационная сушка кордшнуров и корда, пропитанного латексными составами; б – конвективная сушка толстых тканей и модельных цилиндров разной пористости; в – конвективная сушка тонких тканей; высокотемпературная конвективная сушка дощечки сосны; д – конвективная сушка огнеупорной керамики; е – сушка клеепромазанной ткани в среде перегретого водяного пара; ж – сушка клея горячим воздухом на холодной резиновой заготовке; з – сушка клея холодным воздухом на горячей резиновой заготовке

омы скорости сушки  $N(u)$  для ряда конкретных продуктов приведены на рис. 4.3 и 4.6. Их свойства и данные по теплоотдаче представлены далее в табл. 4.3 и 4.4.

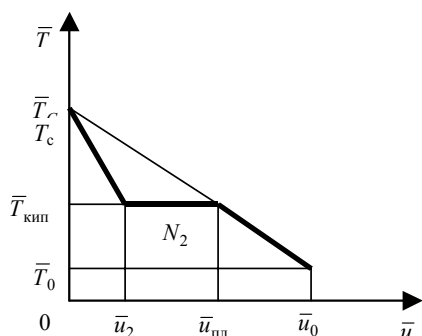
Каждая конкретная расчетная модель должна разрабатываться на основе **экспериментальных** данных.

Для оценочных расчетов можно принимать модель на базе теоретического анализа **по аналогии** с моделями сушки других исследованных материалов с близкими теплопроводными свойствами.

Ниже приведены типичные кинетические модели высокотемпературной воздушной сушки ряда материалов. Температура воздуха в экспериментах изменялась в пределах от 120 до 220 °С. При этом равновесную влажность материала практически можно было принять равной нулю. Использовался в основном продольный обдув воздухом, а при сушке кордных материалов также поперечный и сопловой обдув. Аппроксимации для коэффициентов теплоотдачи по зонам и условий сушки и нагрева приведены в разд. 3.5 и табл. 4.2.

**Сушка дощечки сосны** (рис. 4.3). Относительно большое внутреннее сопротивление древесины массопереносу приводит к тому, что скорость сушки сразу начинает уменьшаться, и зона постоянной скорости сушки при постоянной температуре, равной температуре мокрого термометра, здесь отсутствует. Таким образом, в этом случае нет первого периода и нет соответственно первого критического влагосодержания.

Температура дощечки растет примерно линейно с убылью влагосодержания вплоть до температуры, близкой к температуре кипения воды  $T_{кип} \cong 100$  °С. Здесь температура временно стабилизируется вследствие испарения воды по механизму, аналогичному кипению, и на температурных кривых образуется площадка в области влагосодержаний от  $\bar{u}_{пл}$  до второго критического  $\bar{u}_2$ .



**Рис. 4.3 Модель зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$  для сушки дощечки сосны**

Зависимость  $\bar{T}(\bar{u})$  хорошо аппроксимируется «лучевой» схемой, ясной из рис. 4.3. Для ее количественного описания достаточно всего одной эмпирической постоянной – величины  $\bar{u}_2$ . В среднем принято  $\bar{u}_2 = 15\%$ . В зонах от  $\bar{u}_0$  до  $\bar{u}_{пл}$  и от  $\bar{u}_2$  до конечного влагосодержания:

$$T = T_c + b_T \bar{u}; \tag{4.2.1}$$

$$b_T = -\frac{T_c - \bar{T}_{нз}}{\bar{u}_{нз}}; \tag{4.2.2}$$

$$\bar{u}_{кз} = \frac{\bar{T}_{кз} - T_c}{b_T}. \tag{4.2.3}$$

Расчет зон с возрастающей температурой ведется по формуле (3.6.29).

В зоне постоянной температуры  $\bar{T}_{нз} = \bar{T}_{кз} = \bar{T}_3 = T_{кип}$  скорость сушки также постоянна  $N = N_3 = const$ . Из уравнения (3.6.6) для ее расчета получаем

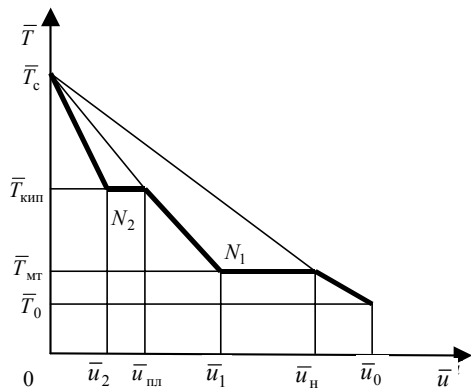
$$N = N_3 = -\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{\alpha F (T_c - \bar{T}_3)}{M_T r}. \tag{4.2.4}$$

Время сушки в этой зоне

$$\tau = \frac{\bar{u}_{нз} - \bar{u}_{кз}}{N_3}. \tag{4.2.5}$$

**Сушка кордшнуров, пропитанных латексными составами (рис. 4.4).**

Здесь начальное сопротивление массопереносу относительно невелико и после кратковременной зоны нагрева наблюдается первый период сушки при температуре мокрого термометра  $\bar{T} = T_{мт}$ , заканчивающийся при первом критическом влагосодержании  $\bar{u}_1$ . Затем температура материала снова начинает возрастать. Этому способствует, в частности, образование латексной пленки, увеличивающей сопротивление переносу влаги.



**Рис. 4.4 Модель зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$  для сушки кордшнуров**

В области влагосодержаний от  $\bar{u}_{пл}$  до второго критического  $\bar{u}_2$  наблюдается второй участок временной стабилизации температуры материала при  $T_{кип} \approx 100\text{ }^\circ\text{C}$ . Зависимость  $\bar{T}(\bar{u})$  аппроксимируется по «лучевой» схеме, ясной из рис. 4.4. Величина  $T_{мт}$  определяется по диаграмме  $I - x$  влажного воздуха. Первое критическое влагосодержание, как и для многих других «жестких» режимов сушки, примерно равно

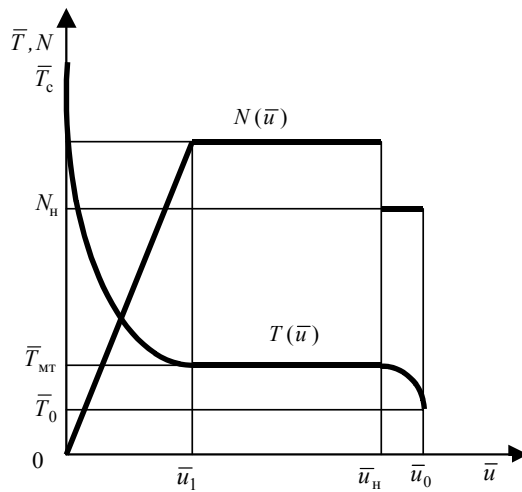
$$\bar{u}_1 \approx 0,56\bar{u}_0. \tag{4.2.5}$$

Второе критическое влагосодержание зависит от вида материала. Для шнуров из химических волокон в среднем  $\bar{u}_2 = 6\%$ .

Зависимость  $\bar{T}(\bar{u})$  в зонах возрастающей скорости сушки определяется выражениями (4.2.1) – (4.2.3). Расчет ведется по формуле (3.2.29). Расчет скорости и времени сушки в зонах постоянной температуры производится по формулам (4.2.5), (4.2.4).

**Сушка асбокартона** (рис. 4.5). Здесь большая часть влаги испаряется при температуре мокрого термометра. Второй температурной площадки не наблюдается, так как к моменту нагрева материала до температуры кипения воды влаги в нем остается слишком мало.

В качестве базовой модели для расчета можно было бы принять  $\bar{T}(\bar{u})$ , однако в последней зоне сушки в зависимости (3.6.7) обработка экспериментальных данных дает  $n_T \cong 0.1$ . Это приводит к необходимости численного решения интеграла (3.6.19).



**Рис. 4.5** Модели зависимостей  $\bar{T}(\bar{u})$  и  $N(\bar{u})$  для сушки асбокартона

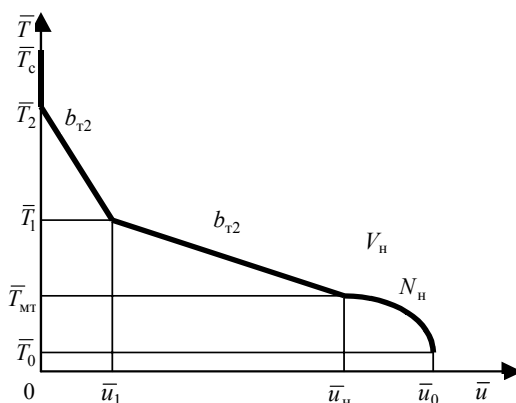
Проще оказывается использовать модель с кусочно-линейной аппроксимацией скорости сушки  $N(\bar{u})$ , также изображенную на рис. 4.5. Для ее описания достаточно двух эмпирических величин:  $\bar{u}_1$  и отношения  $N_H/N_1$ . В среднем принято  $\bar{u}_1 = 15\%$ ,  $N_H = 0,8 N_1$ .

Расчет зоны нагрева ведется по формулам (4.2.4) и (3.6.53), зоны постоянной температуры в области влагосодержаний от  $\bar{u}_n$  до первого критического  $\bar{u}_1$  – по формулам (4.2.4) и (4.2.5), зоны падающей скорости сушки – по зависимостям (3.6.34) и (3.6.50).

**Сушка высокопористой огнеупорной керамики** (рис. 4.6). Здесь после зоны прогрева наступает период приблизительно постоянной скорости сушки.

Однако примечательно, что температура материала при этом не остается равной  $T_{MT}$ , а непрерывно растет, причем скорость нагрева примерно постоянна. Естественно, одновременно со снижением  $[T_c - T(R, \tau)] \cong (T_c - \bar{T})$  падает и приток тепла к телу. Сохранение при этом примерно постоянными скоростей сушки и нагрева объясняется значительным снижением теплоемкости материала  $c = c_T + c_{ж}\bar{u}$  пропорционально убыли влагосодержания. Поэтому в зоне от  $\bar{u}_n$  до критического влагосодержания  $\bar{u}_1$  температурный коэффициент  $b_{\tau 1}$  практически постоянен.

Однако примечательно, что температура материала при этом не остается равной  $T_{MT}$ , а непрерывно растет, причем скорость нагрева примерно постоянна. Естественно, одновременно со снижением  $[T_c - T(R, \tau)] \cong (T_c - \bar{T})$  падает и приток тепла к телу. Сохранение при этом примерно постоянными скоростей сушки и нагрева объясняется значительным снижением теплоемкости материала  $c = c_T + c_{ж}\bar{u}$  пропорционально убыли влагосодержания. Поэтому в зоне от  $\bar{u}_n$  до критического влагосодержания  $\bar{u}_1$  температурный коэффициент  $b_{\tau 1}$  практически постоянен.



**Рис. 4.6 Модель зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$  для сушки керамики**

В дальнейшем при испарении остатков влаги в области  $\bar{u} < \bar{u}_1$  температурный коэффициент еще возрастает, а в области температур материала, больших 90 – 100 °С, влаги в нем практически нет, и происходит «чистый» нагрев до температуры среды.

Для описания кинетики сушки и нагрева принята комбинированная модель: в зоне нагрева от  $\bar{T}_0$  до  $T_{\text{MT}}$  скорость сушки считаем постоянной и равной  $N_{\text{H}} = 0,8 N_1$ ; в зоне влагосодержаний от  $\bar{u}_{\text{H}}$  до  $\bar{u}_1$  принято  $b_{\tau 1} = -0,6 \text{ } ^\circ\text{C} / \%$ ;  $\bar{u}_1 = 5 \%$ ; в области  $\bar{u}_1 > \bar{u} \cong 0$ ,  $b_{\tau 2} = -3,1 \text{ } ^\circ\text{C} / \%$ .

Расчет производится следующим образом: зона нагрева рассчитывается по формулам (4.2.4) и (3.6.53); вторая и третья зона – по формулам (3.6.20) и (3.6.28) соответственно; а последняя зона от  $\bar{T}_2$  до  $\bar{T}_{\text{к}} \rightarrow T_{\text{с}}$  считается по зависимостям для «чистой» теплопроводности.

Таким образом, видно, что температурно-влажностные зависимости весьма разнообразны и определяются механизмом тепломассопереноса. Последний, в свою очередь, зависит от вида материала, а также от режима сушки. Одной из наиболее характерных для высокотемпературной сушки особенностей температурно-влажностных кривых является образование участков временной стабилизации температуры (площадок). В порядке расположения вышеприведенных примеров сушки (дощечка сосны, пропитанные кордшнуры, асбокартон, высокопористая керамика) зависимости  $\bar{T}(\bar{u})$  последовательно характеризуются: одной площадкой при  $T_{\text{кип}}$ ; двумя площадками, при  $T_{\text{MT}}$  и при  $T_{\text{кип}}$ ; одной площадкой при  $T_{\text{MT}}$ ; отсутствием площадок.

В заключение следует отметить, что применение зависимостей  $\bar{T}(\bar{u})$  имеет ряд преимуществ перед использованием аппроксимации  $N(\bar{u})$ . Главное состоит в обеспечении большей точности расчетных кривых.

В частности, обычно  $Q_{\text{нагр}} \ll Q_{\text{исп}}$ , поэтому малые погрешности в описании скорости сушки  $N(\bar{u})$  и коэффициентов теплоотдачи  $\alpha(\bar{u})$  могут приводить к большим ошибкам в определении температуры тела  $\bar{T}(\tau)$  из уравнения теплового баланса и иногда даже к «нефизичностям» на стыках зон. Если же задана  $\bar{T}(\bar{u})$ , то ошибка теплового расчета делится на обе кинетические кривые  $\bar{T}(\tau)$  и  $\bar{u}(\tau)$  равномерно, в соответствии с зависимостью  $\bar{T}(\bar{u})$ .

### **Коэффициенты теплоотдачи в процессе сушки и тепломассопроводные характеристики материалов.**

Коэффициенты теплоотдачи для примеров сушки, рассмотренных в настоящем пособии, приведены в табл. 4.3. Ряд сведений о коэффициентах теплоотдачи в процессах сушки содержится в литературе к пособию.

При отсутствии необходимых данных можно для оценочных расчетов иметь в виду следующее:

Таблица 4.3

Условия сушки и нагрева	$Nu_{\text{исп}}$	$Nu_{\text{сух}}$	Аппроксимация $\alpha(\bar{u})$
Внешнее обтекание пластины потоком воздуха ( $w = 5...15$ м/с; $T_{\text{с}} = 120...220 \text{ } ^\circ\text{C}$ )			
Асбокартон, образцы $120 \times 90 \times 1,0$ мм; $Re = wL/\nu = (2...6)10^4$ ; $L = 0,12$ м	$1,06Re_{0,5}$	$0,53Re_{0,5}$	$\bar{u} > \bar{u}_1$ ; $\alpha = \alpha_{\text{исп}}$ ; $\bar{u} < \bar{u}_1$ ; $\alpha = 0,5(\alpha_{\text{исп}} + \alpha_{\text{сух}})$
ОГНЕУПОРНАЯ КЕРАМИКА, ОБРАЗЦЫ $23 \times 74 \times 4,2$ мм; $Re = (0,9 - 2,4)10^4$ ; $L = 0,053$ м	$0,92Re_{0,5}$	$0,66Re_{0,5}$	$\bar{u} > \bar{u}_1$ ; $\alpha = \alpha_{\text{исп}}$ ; $\bar{u} < \bar{u}_1$ ; $\alpha = \alpha_{\text{сух}}$ *

Дощечка сосны, образцы 220×30×2,1 мм $Re = (4...10)10^4$ ; $L = 0,22$ м	$1,09Re_{0,5}$	$0,77Re_{0,5}$	$\bar{u} > \bar{u}_{пл}$ ; $\alpha = \alpha_{исп}$ ; $\bar{u} < \bar{u}_{пл}$ ; $\alpha = \alpha_{сух}$
Внешнее обтекание цилиндра потоком воздуха ( $w_{прод} = 3...15$ , $w_{поп} = 3...20$ , $w_{сопл} = 15...35$ , $w_{своб} = 0,2...0,5$ м/с; $T_c = 120...220$ °С)			
Шнуры из химволокон, пропитанные латексными составами, образцы $D = (1,2...2,5)10^{-3}$ м; $Re = wL/v$ ; а) поперечный обдув ( $Re = 200...1200$ ), сопловой обдув ( $Re = 60...600$ )* свободная конвекция ( $Re = 10...50$ )* б) продольный обдув ( $Re = 200...1200$ )	$0,40Re_{0,5}$	$0,27Re_{0,5}$	$\bar{u} > \bar{u}_2$ ; $\alpha = \alpha_{исп}$ ; $\bar{u} < \bar{u}_2$ ; $\alpha = \alpha_{сух}^*$
	$0,22Re_{0,5}$	$0,15Re_{0,5}$	

\* Расчет  $\alpha_{сух}$  производится с учетом термического сопротивления материала.  
В остальных случаях температурный напор принимается равным  $(T_c - T_{пл}) \approx (T_c - \bar{T})$ .

\*\* При сопловом обдуве в  $Re$  подставляется эквивалентная скорость воздуха  $w_{сз}$ , средняя по обдуваемой длине шнура. При свободной конвекции использованы скорость «естественного» движения воздуха  $w_{ск}$ , определяемые тепловым режимом, конструкцией и размерами сушилки.

1) коэффициенты теплоотдачи при нагреве сухих материалов  $\alpha_{сух}$  примерно равны коэффициентам теплоотдачи в последней зоне сушки; коэффициенты теплоотдачи в стационарных условиях при тех же способах обдува составляют обычно  $\alpha_{стац} = (0,5...1,3)\alpha_{сух}$ ; значения  $\alpha_{стац}$  можно обычно найти в литературе;

2) коэффициенты теплоотдачи в начале сушки близки к коэффициентам теплоотдачи при испарении со свободной поверхности  $\alpha_{исп}$ ; они обычно составляют  $\alpha_{исп} = (1,3 - 2,0)\alpha_{исп}$ ;

3) для описания коэффициентов теплоотдачи при падающей скорости сушки рекомендованы степенные зависимости; приближенно можно ограничиться более простой кусочно-постоянной аппроксимацией  $\alpha(\bar{u})$  на базе знаний  $\alpha_{исп}$  и  $\alpha_{сух}$ , которые определяются экспериментально достаточно надежно; примеры такой аппроксимации приведены в табл. 4.3.

Данные по **теплопроводным свойствам** кордных материалов приведены в табл. 4.4. Здесь для описания теплопроводности влажных кордных материалов использована модель слоев, параллельных тепловому потоку

$$\lambda = (1 - \Pi)\lambda_{ск} + \bar{u} \frac{\rho_{нас}}{\rho_{ж}} \lambda_{ж} + (\Pi - \bar{u} \frac{\rho_{нас}}{\rho_{ж}})\lambda_{г}, \quad (4.2.7)$$

где  $\lambda_{ск}$ ,  $\lambda_{ж}$ ,  $\lambda_{г}$  теплопроводность «скелета» твердого материала, жидкости и газа, заполняющих поры;  $\bar{u}$  – влагосодержание.

Величины  $\rho_{нас}$  определяются при известной пористости  $\Pi$  по формуле (3.6.9). При расчете коэффициента теплопроводности вязких тканей, пропитанных водой, во второй член уравнения (4.2.7) следует вводить поправочный множитель 0,5, а в случае пропитки перечисленных материалов органическими растворителями – коэффициент 2. При повышенных температурах

$$\lambda_{ск} = \lambda_{ск0} [1 + b(T - T_0)]. \quad (4.2.8)$$

Величины  $\lambda_{ск0}$  при  $T_0 = 273$  °С,  $b$  и  $\rho_{ск}$  приведены в табл. 4.4.

#### 4.4 Свойства кордных материалов

Волокно	$\rho_{ск},$ кг/м <sup>3</sup>	$\lambda_{ск0},$ Вт/(м·К)	$b,$ 1/К	$C_T,$ кДж/(кг· К)
Анид	1140	0,185	-0,002	1,47
Капрон	1140	0,185	-0,002	1,47
Лавсан	1380	0,160	-0,001	1,38
Вискоза	1480	0,200	-0,0005	1,51
Хлопок	1510	0,310	+0,001	1,21

Тепломассопроводные свойства для других материалов необходимо искать в справочной литературе или измерять экспериментально.

4.2.2 Задания для самостоятельных работ (**материалы, условия и цифровые значения задаются преподавателем**).

1) Проверить возможность аналитических решений для других видов аппроксимаций ТВЗ и получить хотя бы одно такое решение.

2) Проверить возможность аналитических решений для других видов аппроксимаций скорости сушки и получить хотя бы одно такое решение.

3) Получить решение с ТВЗ  $T(u)$  для заданных аппроксимаций характеристик и коэффициентов.

4) Получить решение с базовой скоростью сушки  $N(u)$  для заданных аппроксимаций характеристик и коэффициентов.

5) Выполнить варианты расчеты и проанализировать влияние на время сушки основных характеристик процесса при заданной  $T(u)$ .

6) Выполнить варианты расчеты и проанализировать влияние на время сушки основных характеристик процесса при заданной  $N(u)$ .

7) Выполнить расчеты методом аппроксимации  $N(u)$  для двухзональной сушки, проверить наличие нефизичностей на стыках зон, объяснить их причины и предложить возможные виды введения поправок в расчеты.

### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a$  – температуропроводность;

$c$  – теплоемкость;

$C$  – концентрация;

$D$  – коэффициент диффузии;

$d$  – диаметр;

$P$  – потенциал переноса;

$q, m$  – удельные потоки тепла, массы;

$Q$  – количество тепла;

$N$  – скорость сушки;

$M, F$  – масса, поверхность тела;

$R, x, \delta$  – координата, толщина;

$r$  – теплота испарения;

$T, t$  – температура;

$u, g$  – влагосодержание, масса;

$w$  – скорость;

$\alpha, \beta$  – коэффициенты теплоотдачи, массоотдачи;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$\rho$  – плотность;

$\mu, \nu$  – динамическая, кинематическая вязкость;

$\varepsilon$  – коэффициент фазового превращения;

$\tau$  – время.

Примечание: все размерности в формулах и тексте используются в основных и производных некратных единицах Международной системы СИ, за исключением некоторых величин, допускаемых к применению стандартами размерностей, которые специально оговорены в тексте.

## Критерии и числа подобия

$$Bi = \alpha d / \lambda_{\text{мат}}; Gr = (g l^3 / \nu^2) \beta \Delta T; Nu, Nu_{\alpha} = \alpha l / \lambda; Nu_{\beta} = \beta l / D; Pr = \nu / a; Sc = \nu / D.$$

## Индексы

ад – адиабатическое насыщение;	ск – свободная конвекция;
внеш – внешняя;	сл – слой;
э – эффективный;	сух – сухой;
экв – эквивалентный;	ст – стенка;
исп – испарение;	ц – центр.
ж – жидкость;	
мт – мокрый термометр;	
нас – насыщение;	

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### Основная

- 1 Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: в 2-х частях. М.: Высшая школа, 1982. 327 с., 304 с.
- 2 Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1972. 688 с.
- 3 Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
- 4 Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии: учебник для вузов. 11-е изд., стереотип. и дораб. М.: Альянс, 2005. 753 с.
- 5 Коновалов В.И. Расчет кинетики процессов сушки на базе соотношений теплопереноса. Тамбов: ТИХМ, 1978. 32 с.
- 6 Коновалов В.И., Гатапова Н.Ц. Макрокинетика промышленных процессов // Теор. основы хим. техн. 2004. Т. 38, № 2. С. 123 – 132.
- 7 Коновалов В.И., Коваль А.М. Пропиточно-сушильное и клеепромазочное оборудование. М.: Химия, 1989. 224 с.
- 8 Коновалов В.И., Прудник Л.В., Постернак А.Г., Шашков В.Н. Оборудование для охлаждения и усадки профилированных резиновых заготовок. М.: ЦИНТИхимнефтемаш, 1988. 42 с.
- 9 Коновалов В.И., Туголуков Е.Н., Гатапова Н.Ц. О возможностях использования точных, интервальных и приближенных аналитических методов в задачах тепло- и массопереноса в твердых телах // Вестник ТГТУ. 1995. Т.1, № 1–2. С. 75 – 90.
- 10 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
- 11 Лыков А.В. Теория теплопроводности М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- 12 Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. 2-е изд. М.: Энергия, 1978. 480 с.
- 13 Пахомов А.Н., Гатапова Н.Ц. К вопросу описания и расчета кинетики нагрева и сушки слоистых материалов // Труды ТГТУ. Вып.4. Тамбов: ТГТУ, 1999. С. 4 – 8.
- 14 Фролов В.Ф. Лекции по курсу «Процессы и аппараты химической технологии». СПб.: Химиздат, 2003. 608 с.

### Дополнительная литература

- 1 Аксельруд Г.А., Альтшулер М.А. Введение в капиллярно-химическую технологию. М.: Химия, 1983. 264 с.
- 2 Аксельруд Г.А., Лысянский В.М. Экстрагирование. Система твердое тело – жидкость. Л.: Химия, 1974. 256 с.
- 3 Андреев А.А., Дудаков В.П., Арзамасцев А.А. Математическое моделирование в среде MathCAD. Тамбов: ТГУ им. Г.Р. Державина, 1999. 44 с.
- 4 Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. 6-е изд. Л.: Химия, 1971. 824 с.

- 5 Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. Л.: Химия, 1974. 688 с. (Перевод с 5-го изд. 1965 г. 1-е америк. изд. 1960 г.).
- 6 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. 13-е изд., перераб. и дополн. М.: Наука, 1986. 544 с.
- 7 Бэррер Р. Диффузия в твердых телах. М.: Издательство, 1948. 504 с.
- 8 Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд.; М.: Физматлит, 1972. 720 с.
- 9 Вариационные принципы механики / Под ред. и с добавл. Л.С. Полака. М.: Физматлит, 1959. 932 с.
- 10 Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. Киев: Наукова думка, 1979. 359 с.
- 11 Власов В.В. Применение функций Грина к решению инженерных задач теплофизики. М.: МИХМ, 1972. 440 с.
- 12 Гатапова Н.Ц. Кинетика и моделирование процессов сушки растворителей, покрытий, дисперсий, растворов и волокнистых материалов: единый подход. Дис. ... докт. техн. наук. Тамбов: ТГТУ, 2005. 554 с. (Научн. консультант В.И. Коновалов).
- 13 Гатапова Н.Ц. Кинетика и оптимизация циклических тепловых процессов при вулканизации резиновых заготовок: Дис. ... канд. техн. наук. Тамбов: ТИХМ, 1992. 405 с. (Научн. рук. В.И. Коновалов).
- 14 Гатапова Н.Ц., Коновалов В.И. Единый подход к кинетике и моделированию сушки растворителей, покрытий, жидких дисперсий, кристаллообразующих растворов и волокнистых материалов // Вестник ТГТУ. 2004. Препринт № 09. Т. 10 – Юбилейный, № 1. 64 с.
- 15 Гинзбург А.С., Громов М.А., Красовская Г.И. Теплофизические характеристики пищевых продуктов: Справочник. 3-е изд. М.: Агропромиздат, 1990. 287 с.
- 16 Гинзбург А.С., Савина И.М. Массовлагообменные характеристики пищевых продуктов: Справочник. М.: Легпищепром, 1982. 280 с.
- 17 Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене / Под ред. А.А. Гухмана. М., 1958. 598 с.
- 18 Громов Ю.Ю., Татаренко С.И. Введение в методы численного анализа. Тамбов: ТГТУ, 2001. 128 с.
- 19 Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. 5-е изд. М.: Наука, 1978. 228 с.
- 20 Дворецкий Д.С., Ермаков А.А., Пешкова Е.В. Расчет и оптимизация процессов и аппаратов химических и пищевых производств в среде MatLab. Тамбов: ТГТУ, 2005. 80 с.
- 21 Дворецкий С.И., Егоров А.Ф., Дворецкий Д.С. Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования. Тамбов: ТГТУ, 2003. 224 с.
- 22 Дильман В.В., Полянин А.Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. М.: Химия, 1988. 304 с.
- 23 Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 320 с.
- 24 Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоиздат, 1991. 248 с.
- 25 Дьяконов С.Г., Елизаров В.И., Лаптев А.Г. Теоретические основы и моделирование процессов разделения веществ. Казань: КХТИ, 1993. 438 с.
- 26 Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
- 27 Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
- 28 Иванов В.В., Видин Ю.В., Колесник В.А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным теплом. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1990. 160 с.
- 29 Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. 3-е изд. М.: Энергия, 1975, 486 с.
- 30 Калинин Э.К., Дрейцер А.Г., Костюк В.В., Берлин И.И. Методы расчета сопряженных задач теплообмена. М.: Машиностроение, 1983. 232 с.
- 31 Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- 32 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд. М.: Наука, 1971. 576 с.
- 33 Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.



- 34 Каст В., Кришер О., Райнике Г., Винтермантель К. Конвективный тепло- и массоперенос: Единое описание для течения в каналах и внешнего обтекания тел любой формы и расположения. М.: Энергия, 1980. (Пер. с нем. изд. 1974 г.). 49 с.
- 35 Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Гурьева Л.Б. Оптимизация теплообменных процессов и систем. М.: Энергоатомиздат, 1988. 192 с.
- 36 Кирпичев М.В., Михеев М.А. Моделирование тепловых устройств. М.: Изд.-во АН СССР, 1936. 211 с.
- 37 Кожевников И.Г., Новицкий Л.А. Теплофизические свойства материалов при низких температурах: Справочник. М.: Машиностроение, 1982. 328 с.
- 38 Коздоба Л.А. Вычислительная теплофизика. Киев: Наукова думка, 1992. 224 с.
- 39 Козлов В.П. Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1986. 392 с.
- 40 Колиух А.Н. Кинетика процессов охлаждения, нагрева и сушки рулонных материалов на контактных барабанах: Дис. ... канд. техн. наук. Тамбов: ТГТУ, 2001. 209 с. (Научн. рук. В.И. Коновалов, Н.Ц. Гатапова).
- 41 Кольцова Э.М., Третьяков Ю.Д., Гордеев Л.С., Вертегел А.А. Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии. М.: Химия, 2001. 408 с.
- 42 Коновалов В.И. Явления переноса и кинетика промышленных процессов: модели и реальность // Сборник научных трудов к 100-летию П.Г. Романкова. СПб.: СПбТИ, 2004. С. 53 – 71.
- 43 Коновалов В.И. Базовые кинетические характеристики массообменных процессов // Журнал прикладной химии. 1986. Т. 56, № 9. С. 2096 – 2107.
- 44 Коновалов В.И., Гатапова Н.Ц., Пахомов А.Н. Математическое моделирование взаимосвязанных процессов сушки и нагрева // Труды XV Междунар. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-15)». Тамбов: Изд.-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. Т. 3. Секция 3. С. 166 – 176.
- 45 Коновалов В.И., Коробов В.Б., Плановский А.Н., Романков П.Г. Приближенные модели полей температуры и влагосодержания материалов в процессе сушки на основе соотношений теплопереноса // Теор. основы хим. технол. 1978. Т. 12, № 3. С. 337 – 346.
- 46 Коновалов В.И., Романков П.Г., Соколов В.Н. Описание кинетических кривых сушки и нагрева тонких материалов // Теор. основы хим. технол. 1975. Т. 9, № 2. С. 203 – 209.
- 47 Коновалов В.И., Романков П.Г., Соколов В.Н., Пасько А.П. Приближенные модели кинетики конвективной сушки тонких материалов // Теор. основы хим. технол. 1975. Т. 9, № 4. С. 501 – 510.
- 48 Коновалов В.И., Самех С.С., Хануни, Туголуков Е.Н., Гатапова Н.Ц., Коробова И.Л., Михайлов Б.Н., Сергеева Е.А. К расчету внешнего тепло- и массообмена при сушке и нагреве волокнистых материалов // Вестник ТГТУ. 1997. Т. 3, № 1–2. С. 47 – 60.
- 49 Коновалов В.И., Туголуков Е.Н., Гатапова Н.Ц., Самех С.С., Хануни, Коробова И.Л., Пахомов А.Н., Сергеева Е.А. К расчету внутреннего тепло- и массопереноса и кинетики нагрева волокнистых материалов // Вестник ТГТУ. 1997. Т. 3, № 3. С. 224 – 236.
- 50 Коробов В.Б. Исследование полей влагосодержания и температуры в процессе конвективной сушки кордных материалов резиновой промышленности. Дис. ... канд. техн. наук. М.: МИХМ, 1975. 209 с. (Научн. рук. В.И. Коновалов).
- 51 Кошкин В.К., Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Нестационарный теплообмен. М.: Машиностроение, 1973. 328 с.
- 52 Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. 4-е изд. М.: Энергия, 1980. 288 с.
- 53 Кудинов А.А., Кудинов В.А. Теплообмен в многослойных конструкциях. Инженерные методы. Саратов: Изд.-во СГУ, 1992. 136 с.
- 54 Куликов Г.М., Нахман А.Д. Метод Фурье в уравнениях математической физики. М.: Машиностроение, 2000. 156 с.
- 55 Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. Л.-М.: Госэнергоиздат, 1959. 416 с.
- 56 Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидравлическое сопротивление: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990. 367 с.
- 57 Кутепов А.М. (Ред.). Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование: Т. 1: Основы теории процессов химической технологии. М.: Логос, 2000. 480 с.
- 58 Кутепов А.М. (Ред.). Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование: Т. 2: Механические и гидромеханические процессы. М.: Логос, 2001. 600 с.

- 59 Литовка Ю.В. Получение оптимальных проектных решений и их анализ с использованием математических моделей. Тамбов: ТГТУ, 2003. 171с.
- 60 Лыков А.В. Теория сушки. 2-е изд. М.: Энергия, 1968. 472 с.
- 61 Лыков А.В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: Гостехиздат, 1954. 296 с.
- 62 Лыков А.В., Алексащенко А.А., Алексащенко В.Л. Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск: Изд. БГУ, 1971. 347 с.
- 63 Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.
- 64 Малыгин Е.Н., Карпушкин С.В., Туголуков Е.Н. Прикладное программирование. Тамбов: ТГТУ, 2000. 117 с.
- 65 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: 3-е изд. М.: Высшая школа, 1967. 564 с.
- 66 Михайлов М.Д. Нестационарный тепло- и массоперенос в одномерных телах. Минск: Наука и техника, 1969. 240 с.
- 67 Михайлов Ю.А. Сушка перегретым паром. М.: Энергия, 1967. 200 с.
- 68 Михайлов Ю.А., Глазунов Ю.Т. Вариационные методы в теории нелинейного тепло- и массопереноса. Рига: Зинатне, 1985. 190 с.
- 69 Мищенко С.В., Черепенников И.А., Кузьмин С.Н. Расчет теплофизических свойств веществ. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. 208 с.
- 70 Общий курс процессов и аппаратов химической технологии / Под ред. В.Г. Айнштейна. М.: Химия. Кн. 1, 1999. Кн. 2, 2000. 1760 с.
- 71 Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.
- 72 Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. 10-е изд., перераб. и доп. Л.: Химия, 1987. 576 с.
- 73 Пахомов А.Н. Кинетика сушки дисперсий на твердых подложках. Дис. ... канд. техн. наук. Тамбов: ТГТУ, 2000. 225 с. (Научн. рук. В.И. Коновалов, Н.Ц. Гагапова).
- 74 Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
- 75 Петухов Б.С. Теплообмен в движущейся однофазной среде. Ламинарный пограничный слой. М.: МЭИ, 1993. 352 с.
- 76 Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. 2-е изд. Л.: Энергия, 1976. 352 с.
- 77 Плановский А.Н., Николаев П.И. Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Химия, 1987. 496 с.
- 78 Полянин А.Д. В., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998. 368 с.
- 79 Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
- 80 Пономарев С.В., Мищенко С.В. Методы и устройства для измерения эффективных теплофизических характеристик потоков технологических жидкостей. Тамбов: ТГТУ, 1997. 245 с.
- 81 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
- 82 Протодяконов И.О., Богданов С.Р. Статистическая теория явлений переноса в процессах химической технологии. Л.: Химия, 1983. 400 с.
- 83 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1981. 780 с.
- 84 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1983. 800 с.
- 85 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
- 86 Райченко А.И. Математическая теория диффузии в приложениях. Киев: Наукова Думка, 1981. 396 с.
- 87 Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.К. Свойства газов и жидкостей. 3-е изд. Л.: Химия, 1982. 592 с. (См. также Reid R.C. 4-е англ. изд. 1987 г.).
- 88 Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.Н., Курочкина М.И. Методы расчета процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). СПб.: Химия, 1993. 496 с.
- 89 Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 380 с.
- 90 Рудобашта С.П. Массоперенос в системах с твердой фазой. М.: Химия, 1980. 248 с.

- 91 Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. М.: Химия, 1993. 208 с.
- 92 Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд. М.: Физматлит, 2001.
- 93 Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гербхардт, Й. Джалурия и др. М.: Мир, 1991. Кн. 1. 678 с.; Кн. 2. 528 с.
- 94 Слэттери Дж. С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. М.: Энергия, 1978. 448 с. (Перевод с издания «Slattery J. C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua. New York: McGraw-Hill, 1971. 679 p.» См. также америк. переиздания 1978 и 1981 г., а также книги по межфазному переносу «Interfacial Transport Phenomena» 1990 г. и курс явлений переноса «Advanced Transport Phenomena» 1999 г.).
- 95 Солодков А.П. (Ред.). Практикум по теплопередаче. М.: Энергоатомиздат, 1986. 296 с.
- 96 Справочник по теплопроводности жидкостей и газов / Н.Б. Варгафтик, Л.П. Филиппов, А.А. Тарзиманов, Е.Е. Тоцкий. М.: Энергоатомиздат, 1990. 352 с.
- 97 Старк Дж.П. Диффузия в твердых телах. М.: Энергия, 1980. 240 с.
- 98 Теория теплообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.
- 99 Теплопроводность твердых тел: Справочник / Под ред. А.С. Охотина. М.: Энергоатомиздат, 1984. 320 с.
- 100 Теплофизические свойства веществ / Под ред. Н.Б. Варгафтика. М.-Л.: ГЭИ, 1956. 367 с.
- 101 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1966. 724 с.
- 102 Туголуков Е.Н. Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств. М.: Машиностроение, 2004. 100 с.
- 103 Туголуков Е.Н. Кинетика сушки и охлаждения клеепромазанных резиновых заготовок: Дис. ... канд. техн. наук. Тамбов: ТИХМ, 1986. 321 с. (Научн. рук. В.И. Коновалов).
- 104 Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. М.: Атомиздат, 1979. 216 с.
- 105 Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. 3-е изд. М.: Наука, 1987. 492 с.
- 106 Хаузен Х. Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрестном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.
- 107 Шаталов Ю.С. Функционально-интегральные уравнения теплофизических характеристик. М.: Наука, 1996. 297 с.
- 108 Ярышев Н.А. Теоретические основы измерения нестационарных температур. Л.: Энергия, 1967. 300 с.
- 109 BELLMAN R.E. DYNAMIC PROGRAMMING. NEW YORK: DOVER, 2003. XXV, 340 P. (СМ. ТАКЖЕ РУС. ПЕРЕВОД С 1-ГО АМЕРИК. ИЗД. OXFORD: PRINCETON, 1957 «БЕЛЛМАН Р. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. М.: ИЗДАТИНЛИТ, 1960. 420 С.»).
- 110 Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. Transport Phenomena. New York: Wiley, 1960. XXI, 780 p. (Все многочисленные регулярные переиздания – стереотипные).
- 111 Crank J. The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon, 1975. IX, 414 p.
- 112 Handbook of Heat and Mass Transfer Operations / Ed.: N.P. Cheremisinoff. Houston: Gulf. Publ., 1986. XIV, 1456 p.
- 113 Konvalov V.I., Gatapova N.Z., Kudra T. Drying of liquid dispersions – a unified approach to kinetics and modeling // Drying Technology – An Intern. Journal (New York). 2003. Vol. 21, No. 6. Pp. 1029 – 1047.
- 114 Perry's Chemical Engineering Handbook. 7th Edition / Eds. R.H. Perry, D.W. Green, J.O. Maloney. New York: Mc Graw Hill, 1997. 2624 p.
- 115 Reid R.C., Prausnitz J.M., Poling B.E. The Properties of Gases and Liquids: 4th Ed. New York: McGraw Hill, 1987. 741 p.